

Über die Zerlegung der Ebene
in zwei Arten topologisch verschiedener Flächen

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Heinz-Dieter Löckenhoff
aus Essen

Marburg 1968

Über die Zerlegung der Ebene
in zwei Arten topologisch verschiedener Flächen



INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Heinz-Dieter Löckenhoff

aus Essen

Marburg 1968



Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 19. 10. 1968

Tag der mündlichen Prüfung am 16. 11. 1968

Berichterstatter: Prof. Dr. E. Hellner

Mitberichterstatter: Doz. Dr. H. H. Lohse

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung. Zusammenhang des Begriffs der Koordinationszahl mit dem Problem der Raum- bzw. Ebenenzerlegung. Aufgabenstellung der Arbeit	1
II. Historischer Überblick über Ansätze und Lösungsversuche zum Problem der Ebenenzerlegung	4
III. Das Problem der homogenen Ebenenzerlegung	7
IV. Das Problem der heterogenen Ebenenzerlegung mit zwei Flächenarten	14
1. Definitionen	14
2. Aufstellen diophantischer Gleichungen	15
3. Diskussion der Gleichungen	18
4. Diskussion der Möglichkeit der Herleitung heterogener Ebenenzerlegungen mit Hilfe der Ebenengruppen	20
5. Fallunterscheidungen hinsichtlich der relativen Lage der voneinander verschiedenen Flächen bezüglich der zu den Ebenengruppen gehörenden Symmetriegerüste	28
6. Beispiele zur Herleitung der Ebenenzerlegungen	61
7. Tabelle der heterogenen Ebenenzerlegungen mit zwei topologisch verschiedenen Flächenarten	73
8. Häufigkeitsverteilung hinsichtlich der Koordinationsmöglichkeiten	97
9. Bildteil	100
10. Zusammenfassung	161
11. Literatur	163



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554409_0075

I. Einleitung. Zusammenhang des Begriffs der Koordinationszahl mit dem Problem der Raum- bzw. Ebenenzerlegung. Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit.

Man versteht unter der Koordinationszahl eines Elements im klassischen Sinne die Anzahl seiner nächsten Nachbarn, unter der (Fremd-)Koordinationszahl eines Partners in einer Verbindung $A_m B_n$ die Anzahl der nächsten Nachbarn der anderen Art.¹⁾ Da es nun aber häufig aus kristallchemischen Gründen nicht wünschenswert ist, diese Definition in ihrer vollen Strenge anzuwenden, so läßt man bei der Bestimmung der Anzahl der nächsten Nachbarn "kleine" Abweichungen vom kleinsten Abstand zu, wobei es nun aber schwer fällt, eine allgemein begründete obere Grenze für diese Abweichungen anzugeben.

Wegen des Unbefriedigenden dieser Konzeption wurden von verschiedenen Seiten andere Vorstellungen entwickelt. So schlägt Laves vor, in einer $A_m B_n$ -Verbindung um die Teilchen einer Art konvexe Polyeder -"Wirkungsbereiche"- nach gewissen Vorschriften zu konstruieren derart, daß der ganze Raum lückenlos ausgefüllt ist und daß sich die Polyeder nicht gegenseitig durchdringen. Alle Teilchen der anderen Art, die im Innern eines solchen Polyeders liegen, haben dann nach Laves die Koordinationszahl eins, ein Teilchen, das auf dem Rande liegt, hat eine Koordinationszahl, die gleich der Anzahl der Wirkungsbereiche ist, auf deren gemeinsamen Rand das Teilchen liegt.²⁾

Zu einer allgemeinen Diskussion der sich aus dieser Grundvorstellung ergebenden Koordinationsverhältnisse ist es notwendig, über alle lückenlosen Zerlegungen des dreidimensionalen Raumes in konvexe kongruente Bereiche verfügen zu können, in denen sich keine der Bereiche gegenseitig durchdringen. Dieses Zerlegungsproblem ist auch heute noch nicht gelöst. Laves beschränkte sich bei der allgemeinen Diskussion auf das analoge Problem in der Ebene und leitete dazu unter plausiblen Voraussetzungen die dort möglichen "homogenen" Zerlegungen her.²⁾

Auch Frank und Kasper gehen bei ihrer Definition der Koordinationszahl von einer lückenlosen Zerlegung des Raumes in sich nicht gegenseitig durchdringende Bereiche aus. Sie konstruieren um jedes A- und jedes B-Teilchen einer $A_m B_n$ -Verbindung einen speziellen Bereich, der - wie es von P. Niggli für einen "Wirkungsbereich" verlangt wird³⁾ - so beschaffen ist, daß er alle Punkte des Raumes enthält, die einen kürzeren Abstand zum Mittelpunkt dieses Teilchens als zum Mittelpunkt irgendeines anderen Teilchens haben. Die Anzahl der Bereiche, die mit dem Bereich eines herausgegriffenen Teilchens eine gemeinsame Fläche haben, gibt dann die Koordinationszahl dieses Teilchens an.^{4,1)}

Bei jeder gegebenen Verbindung $A_m B_n$ läßt sich so - wie auch bei der von Laves gegebenen Definition - selbstverständlich die Koordinationszahl angeben; aber wie dort, so scheitert auch hier die allgemeine Diskussion für den dreidimensionalen Raum daran, daß es noch nicht gelungen ist, alle Zerlegungsmöglichkeiten herzuleiten.

Die von Frank und Kasper gegebene Definition erfordert, daß je zwei benachbarte Teilchen im Raum durch eine die Strecke zwischen ihnen halbierende und darauf senkrecht stehende Ebene getrennt werden. Bei verschiedenen Teilchensorten A und B kann das aber nur eine erste Näherung sein. Es könnte sich durchaus als nützlich erweisen, die zwei Teilchen verbindende Strecke durch eine diese Teilchen trennende Ebene in einem anderen Verhältnis zu teilen. Der allgemeinen Diskussion der Koordinationsmöglichkeiten liegt hier nun die lückenlose Zerlegung des Raumes in zwei Arten konvexer Polyeder zugrunde, ein Problem das ebenfalls noch nicht gelöst ist.

In der vorliegenden Arbeit soll nun das diesem Problem analoge aber bei weitem einfachere zu behandelnde Problem, die Ebene mit zwei verschiedenen Arten von konvexen Flächen lückenlos zu bedecken, behandelt werden. Ist diese Aufgabe gelöst, so lassen sich alle Spezialfälle herleiten, die sich für die zwei verschiedenen Teilchenarten in der Ebene zuzuordnenden konvexen Flächen aus Vorschriften über die Lage der die Teilchen trennenden Geraden ergeben.

In neuerer Zeit sind von verschiedenen Autoren Versuche unternommen worden, Strukturmöglichkeiten durch Konstruktion von zwei- und dreidimensionalem Netzwerk aufzuzeigen.⁵⁻⁹⁺⁾ Da unserem Problem der Zerlegung der Ebene in zwei Flächenarten das Problem der Zerlegung der Ebene in Netze mit zwei Punktarten dual ist - man ordnet jeder Fläche einen Punkt in ihrem Innern zu und verbindet solche Punkte miteinander, deren zugehörige Flächen gemeinsame Kanten haben-, so kann die vorliegende Untersuchung auch im Hinblick auf derartige Überlegungen nützlich sein.

+) Die Aufzählung erhebt natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

II. Historischer Überblick über Ansätze und Lösungsversuche zum Problem der Ebenenzerlegung.

Eine vorgegebene Fläche mit periodisch wiederkehrenden Mustern zu bedecken, scheint schon früh einen Anreiz ausgeübt zu haben und entwickelte sich im Spanien des 13. Jahrhunderts unter den Mauren zu künstlerischer Hochform.¹⁰⁾ Beispiele für derartige Ornamente finden sich etwa in Speisers Werk über Gruppentheorie¹¹⁾ und in großartiger Mannigfaltigkeit in Owen Jones' "Grammatik der Ornamente".¹²⁾

Mit Keplers Werk "Harmonices mundi", in dem übrigens auch das dritte Keplersche Gesetz der Planetenbewegung mitgeteilt wird, beginnt dann im Jahre 1619 eine Reihe von Arbeiten, in denen systematisch das Problem der Zerlegung der euklidischen Ebene in einzelne lückenlos aneinander grenzende und sich nicht überlappende Bereiche untersucht wird, wobei für die geometrische Form dieser Bereiche im Einzelfall besondere Bedingungen vorausgesetzt werden. So untersucht Kepler die lückenlose Einteilung der Ebene in reguläre und halbrekuläre Polygone,¹³⁾ A. Badpureau 1881 in seiner Arbeit "Mémoires sur les figures isoscèles"¹⁴⁾ unter anderem das Problem, eine Ebene mit konvexen regulären Polygonen derart zu überdecken, daß weder Lücken noch Überlappungen vorliegen und daß alle in der Zerlegung auftretenden Eckpunkte einander topologisch äquivalent sind.

Anders als Kepler, der bei seinen Herleitungen und Beweisen ausschließlich geometrische Überlegungen anstellt, leitet Badpureau mit Hilfe der Bedingung der Regularität der Flächen fünf diophantische Gleichungen her, aus deren Lösungsmenge er die auch wirklich zeichenbaren Lösungen aussondert - leider übersieht er dabei eine Zerlegung.

Der Italiener A. Andreini untersucht - augenscheinlich ohne von Badpoureaus Arbeit zu wissen - das gleiche Problem noch einmal in seiner 1907 erschienen Arbeit "Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative".¹⁵⁾ - Auch Andreini stellt zur Lösung

des Problems - wie Badoureau - aus der Regularitätsbedingung diophantische Gleichungen auf, zeigt aber außerdem, daß diese Gleichungen ebenfalls aus der Eulerschen Polyedergleichung folgen. Andreini findet - außer einem Grenzfall - elf Zerlegungen. Er ordnet dann weiter jeder Fläche dieser Zerlegung einen Punkt - ihren Mittelpunkt - zu, verbindet die Mittelpunkte dort, wo die zugehörigen Flächen gemeinsame Kanten haben und erhält so elf Zerlegungen mit jeweils nur einer Flächenform.

In den genannten Arbeiten lag das Hauptinteresse ganz bei den mathematischen Untersuchungen über Zerlegungsmöglichkeiten; davon unabhängig benutzen Dirichlet (1850)¹⁶⁾, Hermite (1850)¹⁷⁾ und Voronoi (1908)¹⁸⁾ in ihren Arbeiten über die Theorie der quadratischen Formen und deren Reduktion als Hilfsmittel eine spezielle Unterteilung der Ebene in Einzelflächen, die lückenlos und ohne Überlappungen aneinanderengrenzen. Sie gehen dabei so vor, daß sie einen Punkt aus einer in der Ebene gelegenen diskreten Punktmenge mit seinen Nachbarn durch gerade Linien verbinden und auf diesen Verbindungsstrecken die Mittelsenkrechten errichten. Diese umschließen dann eine konvexe Fläche, den sogenannten Dirichletschen oder auch Voronoischen Bereich. - Selbstverständlich ist das Verfahren auch im dreidimensionalen Raum anwendbar. - Dieses Vorgehen, bei dem ja nur dann sämtliche mit der Konstruktionsvorschrift verträglichen Zerlegungen herleitbar sind, wenn vorher sämtliche möglichen Punktanordnungen in der Ebene - bzw. im Raum - aufgestellt worden sind, dient oft bei kristallchemischen Überlegungen - wie sie etwa von P. Niggli³⁾ vorgeschlagen werden - aber auch in der Physik bei der Konstruktion der "Wigner-Seitz-Zelle"¹⁹⁾ dazu, im konkreten Einzelfall Bausteinen des Festkörpers in einer ersten Näherung Bereiche zuzuordnen, in denen der von diesen Bausteinen herrührende Einfluß - wie immer man diesen genauer definiert - überwiegt.

Die oben besprochenen Untersuchungen, die sich mit dem Zerlegungsproblem der Ebene und auch mit dem des drei-

dimensionalen Raumes befassen, verdanken ihre Durchführung ausschließlich mathematischem Interesse. - Es kommt uns hier zwar nicht darauf an, Vollständigkeit in der Aufzählung aller der Mathematiker anzustreben, die sich mit den Zerlegungsmöglichkeiten von Ebene und Raum in Teilbereiche beschäftigt haben, drei Namen sollen aber doch noch erwähnt werden, Minkowski mit seiner Arbeit über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper²⁰⁾, Schoenflies, der die Verbindung von Raumteilung und Gruppentheorie erkannte²¹⁾ und schließlich K. Reinhardt mit seiner Arbeit "Über die Zerlegung der Ebene in Polygone".²²⁾

Neben dem mathematischen lag auch durchaus ein naturwissenschaftliches, speziell kristallographisches Interesse an dem Problem der Ebenen- und Raumteilung vor. So leitete der russische Kristallograph F. von Fedorow die Möglichkeiten her, die Ebene in "Planigone", kongruente und parallel gelagerte Flächen, zu zerlegen²³⁾. F. Haag beschäftigte sich in einer Reihe von Arbeiten mit Ebenenteilungen²⁴⁾, und schließlich leitete Laves die unter gewissen einschränkenden Bedingungen einzig möglichen elf Zerlegungen der Ebene in topologisch äquivalente Flächen her und erwähnte dabei, daß Shubnikow das duale Problem topologisch äquivalenter Punkte mit Hilfe der Eulerschen Polyedergleichung gelöst hatte²⁾. - Allen drei Autoren scheinen die Arbeiten von Badoureau und Andreini - in denen das Problem ja schon gelöst war - nicht bekannt gewesen zu sein. - Schließlich untersuchte Heesch noch die Möglichkeiten gitterhafter Ebenenteilungen, "bei denen durch eine Decktransformation jede Kante in jede andere übergehen kann".²⁵⁾

Mit dem Abschluß dieser Entwicklung sind die Probleme der homogenen Ebenenteilung bezüglich topologisch gleichwertiger Flächen, topologisch gleichwertiger Punkte, topologisch gleichwertiger Kanten und der heterogenen Ebenenteilung bezüglich regulärer Flächen mit einer Art von topologisch äquivalenten Eckpunkten gelöst.

III. Das Problem der homogenen Ebenenzerlegung.

Zunächst wollen wir uns - als Vorbereitung für das Problem der heterogenen Ebenenzerlegung - etwas eingehender mit der Frage nach den homogenen Ebenenteilungen, d. h. nach den Möglichkeiten der Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente, also gleiche oder spiegelbildlich gleiche Flächen beschäftigen - und wollen dabei von vornherein voraussetzen, daß sich diese Flächen nicht überlappen und daß es auch keinen Punkt der Ebene gibt, der nicht im Inneren einer derartigen Fläche liegt oder zum Rand zweier oder mehrerer Flächen der Zerlegung gehört. Man erkennt hier unmittelbar, daß eine derartige Frage ohne einschränkende Nebenbedingungen zu beliebig vielen Lösungen führt, lassen sich doch beliebig viele Flächen finden, die etwa nach der Art der in Abb. 1 dargestellten Fläche konstruiert sind und ebenso wie dort zu lückenlosen, sich nicht überlappenden Zerlegungen zusammengesetzt werden können.

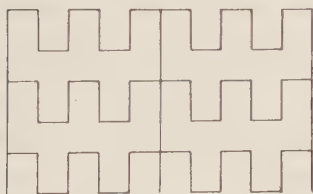


Abb. 1

Unserem Ziele gemäß wollen wir nur Zerlegungen mit konvexen Polygonen betrachten - und wir wollen dabei außerdem noch vereinbaren, daß als Eckpunkt einer zur Zerlegung gehörenden

Fläche nur ein solcher Punkt zu betrachten ist, der zugleich zum Rand von drei oder mehreren Polygonen gehört. - Diese einschränkenden Bedingungen sind aber auch für andere Zielsetzungen - etwa im Hinblick auf den gitterförmigen Aufbau möglicher Strukturtypen - nicht hemmend, denn einmal lassen sich selbstverständlich bei einer Zerlegung mit nur einer Flächenart alle Zerlegungen mit

konkaven Flächen auf solche mit konvexen zurückführen, andererseits lassen sich auf den Kanten zwischen zwei Polygonen beliebig viele nur zum Rand dieser beiden Flächen gehörenden Punkte nach der Konstruktion zusätzlich einfügen.

Wir haben nun noch festzulegen, in welchem Falle wir zwei "Zerlegungsmuster" als zur gleichen Zerlegung gehörig ansehen wollen - und wir wollen dabei den allgemeinsten, nämlich den topologischen Standpunkt einnehmen - alle etwa gewünschten Spezialisierungen lassen sich dann bei Bedarf ohne große Mühe herleiten. Es liegt also nahe, zunächst den Begriff des Zerlegungsmusters oder - wie wir auch sagen wollen - der Darstellung der Zerlegung zu definieren und dann die Zerlegung als Menge ihrer Darstellungen aufzufassen.

Zunächst wollen wir erklären, was unter einem konvexen n -Eck in einer Zerlegung zu verstehen ist, dabei werden wir das Wort "Zerlegungs- n -Eck" oder - wo keine Verwechslungen zu befürchten sind - auch einfach das Wort " n -Eck" benutzen.

Definition: Ein konvexes Zerlegungs- n -Eck ist ein durch Strecken berandetes konvexes Gebiet, auf dessen Rand genau n Punkte mit der Eigenschaft liegen, daß sie zum Rand von drei oder mehreren solcher Gebiete gehören.

Es schließen sich dann die folgenden Definitionen an.

Definition: Unter einer Darstellung einer homogenen Zerlegung der euklidischen Ebene in konvexe Zerlegungs- n -Ecke verstehen wir eine Menge von solchen n -Ecken mit folgenden Eigenschaften.

- 1) Zu jedem beliebigen Punkt der Ebene gibt es entweder genau ein n -Eck, zu dessen Inneren der Punkt gehört, oder mehrere n -Ecke derart, daß der Punkt zum Rand jedes dieser Polygone gehört.
- 2) Zu je zwei beliebigen n -Ecken p_n und p'_n aus der Menge gibt es eine Bewegung oder eine Umklappung, die p_n in p'_n überführt und die zugleich ein Homöomorphismus ist.

Definition: Zwei Darstellungen einer homogenen Zerlegung der euklidischen Ebene in n -Ecke gehören dann und nur dann zu derselben homogenen Zerlegung, wenn es einen Homöomorphismus gibt, der die beiden Darstellungen ineinander überführt.

Damit verstehen wir also unter einer homogenen Zerlegung der euklidischen Ebene eine Menge ineinander homöomorph abbildbarer Darstellungen.

Diese Definitionen führen gerade wieder zu den von Andreini und Laves gefundenen Zerlegungen mit einer Flächenart.

Es soll noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Definition des n -Ecks in der Darstellung einer homogenen Zerlegung der euklidischen Ebene nicht mit der gebräuchlichen Definition eines konvexen Polygons übereinstimmt, da ja in der Darstellung die eine Ecke bildenden Strecken durchaus auch einen Winkel von 180° einschließen können.

Zur Illustration zeigt Abb. 2 zwei zur gleichen Zerlegung in 6-Ecke gehörende Darstellungen.



Charakterisieren können wir diese Zerlegung durch das Schläfli-Symbol 333333 oder auch 3^6 oder $\{3,6\}$, das anzeigt, daß um jede der 6 Ecken des Polygons in gleicher Weise drei 6-Ecke liegen.

Selbstverständlich werden nach den obigen Definitionen enantiomorphe Darstellungen zu derselben Zerlegung gerechnet.

Will man sich nun die Berechtigung der Anwendung der Eulerschen Polyedergleichung auf das Problem der homogenen Ebenenzerlegung klar machen - sie wurde schon von Andreini¹⁵⁾ und Haag^{24a)} festgestellt -, so denke man sich etwa ein Polyeder - für das die Gleichung ja gilt - von einer Kugel umgeben. Projiziert man nun vom Mittelpunkt der Kugel aus alle Kanten, Ecken und Flächen auf die durchsichtig gedachte Kugeloberfläche, so muß natürlich für diese Bedeckung der Oberfläche ebenfalls die Eulersche Gleichung gelten. Die euklidische Ebene kann man sich dann als eine Kugel denken, deren Radius über alle Grenzen hinaus angewachsen ist.

Ausgehend von der Eulerschen Polyedergleichung

$$e - k + f = \chi,$$

in der e die Anzahl der Ecken, k die der Kanten und f die der Flächen bedeutet, während χ eine Konstante ist, kann man mit Heesch²⁶⁾ folgendermaßen argumentieren.

Der Anteil eines n -Ecks an f ist 1 , der Anteil dieses Polygons an k ist $\frac{n}{2}$ und der Anteil an e ist, wenn mit i_q die Zahl der in der q -ten Ecke der Fläche zusammenstossenden n -Ecke bezeichnet wird, $\sum_{q=1}^n \frac{1}{i_q}$, so daß der Anteil einer Einzelfläche an der auf der linken Seite der Eulerschen Gleichung stehenden Summe $\sum_{q=1}^n \left(\frac{1}{i_q} - \frac{n}{2} + 1 \right)$ ist. Demzufolge gilt die Gleichung $\sum_{\text{alle Flächen}} \left(\sum_{q=1}^n \left(\frac{1}{i_q} - \frac{n}{2} + 1 \right) \right) = \chi$ oder auch

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^f \left(\sum_{q=1}^{n_v} \left(\frac{1}{i_q} - \frac{n_v}{2} + 1 \right) \right) \right) = \chi.$$

Da für endliches f

$$\sum_{v=1}^f \left(\sum_{q=1}^{n_v} \left(\frac{1}{i_q} - \frac{n_v}{2} + 1 \right) \right) = f \cdot \left(\sum_{q=1}^n \left(\frac{1}{i_q} - \frac{n}{2} + 1 \right) \right)$$

ist - alle n_v -Ecke sind ja gleichartige n -Ecke -, so

kommt man durch den Übergang $f \rightarrow \infty$ zu der Gleichung, die für ein n -Eck gelten muß:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{n}{2} + 1 = 0.$$

In analoger Weise erhält man im dualen Fall - wenn also aus topologischer Sicht nur eine Art von Ecken vorliegt, die Gleichung

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{n_j} - \frac{i}{2} + 1 = 0,$$

wobei i angibt, wieviele Flächen in einer Ecke zusammenstoßen und n_j die Eckenzahl der j -ten dieser Fläche bedeutet. - Wir werden i im folgenden auch als Wertigkeit des (Eck-)Punktes bezeichnen.

Betrachtet man eine Zerlegung, in der alle Kanten untereinander topologisch äquivalent sind, so erhält man die Gleichung

$$(3) \quad \frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 = 0,$$

wobei i und j die Wertigkeiten der Kantenendpunkte sind und n und m die Eckenzahlen der beiden durch diese Kante getrennten Polygone bedeuten.

Es soll hier schon ausdrücklich betont werden, daß zwar für alle Zerlegungen der von uns betrachteten Art jeweils die entsprechende Gleichung erfüllt sein muß, daß aber diese Bedingung nur hinreichend, nicht notwendig ist. Schon A. Badoureau erkannte diese Tatsache bei der Behandlung der diophantischen Gleichungen, die er - wie schon erwähnt - mittels der Bedingung der Regularität der Flächen aufstellte.

Betrachtet man die obigen drei Gleichungen nun näher, so erkennt man leicht, daß die Lösungsmengen endlich sind.

So kann etwa die Gleichung (1) umgeformt werden zu

$$(1') \quad \frac{2}{n-2} \cdot \sum_{q=1}^n \frac{1}{2^q} = 1.$$

Nun gilt aber für $n > 6$

$$\frac{2}{n-2} \cdot \sum_{q=1}^n \frac{1}{2^q} \leq \frac{2}{n-2} \cdot \frac{n}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{n}} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

daß also für $n > 6$ die Gleichung (1') und damit die Gleichung (1) nicht mehr erfüllt werden kann.

Für $n=3$, $n=4$, $n=5$ und $n=6$ findet man aus (1) leicht eine obere Schranke für die Punktwertigkeiten. - Es ergeben sich 17 Lösungen. Aus diesen 17 Lösungen lassen sich 6 Lösungen, als nicht zu lückenlosen und überlappungsfreien Zerlegungen der verlangten Art gehörig, aussondern. Die 11 restlichen Lösungen sind die schon von Andreini und Laves angegebenen Zerlegungen. - Siehe hierzu Abb. 3

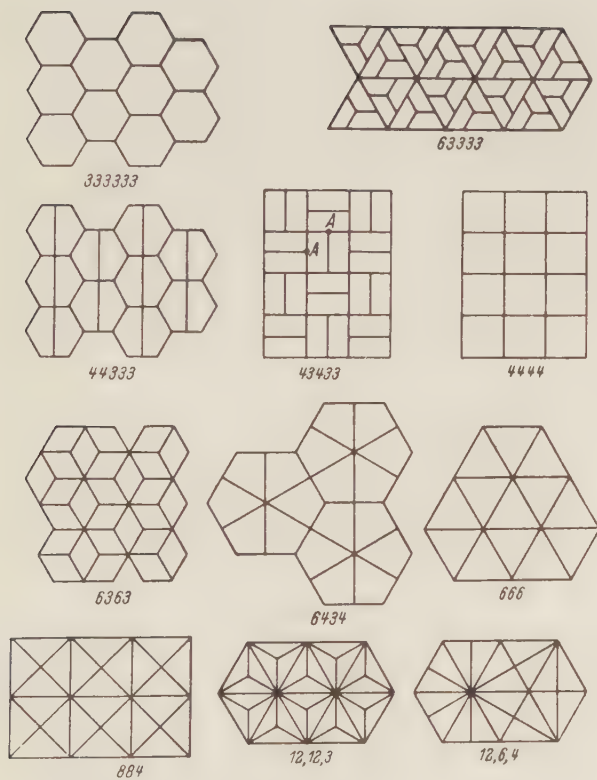


Abb. 3. Die 11 homogenen Ebenenzerlegungen (nach Heesch³²⁾)

IV. Das Problem der heterogenen Ebenenzerlegung mit zwei Flächenarten.

1. Definitionen

Nun wollen wir versuchen, analog unseren Überlegungen zum Problem der homogenen Ebenenzerlegung den Fall zu behandeln, daß zwei verschiedene Arten von Flächen vorliegen. Auch hier wollen wir nur konvexe Flächen betrachten, so daß also speziell keine Zerlegungen auftreten können, in denen Zweiecke - oder gar Einecke - auftreten. Derartige Zerlegungen können für spezielle Fragestellungen durchaus Bedeutung haben, sind dann aber aus den hier behandelten leicht abzuleiten. Des weiteren wollen wir - wie im Falle der homogenen Ebenenteilung - keine 2-wertigen Punkte als Ecken zulassen.

Wir erweitern unsere im vorigen Kapitel gegebene Definition hier nun in folgender Weise.

Definition: Ein konvexes (Zerlegungs-)v-Eck ist ein durch Strecken berandetes konvexes Gebiet, auf dessen Rand genau v Punkte mit der Eigenschaft liegen, daß sie zum Rand von mindestens drei konvexen Gebieten gehören.

Definition: Unter einer Darstellung einer heterogenen Zerlegung der euklidischen Ebene in konvexe n -Ecke und m -Ecke verstehen wir eine sich aus je einer Menge M_{p_m} von konvexen m -Ecken und M_{p_n} von konvexen n -Ecken zusammensetzende Menge von Flächen mit folgenden Eigenschaften.

- 1) Zu jedem beliebigen Punkt der Ebene gibt es entweder genau ein m -Eck oder genau ein n -Eck, zu dessen Inneren der Punkt gehört, oder aber mehrere Polygone aus einer der Teilmengen oder aus beiden Teilmengen M_{p_m} und M_{p_n} derart, daß der Punkt zum Rand jedes dieser Polygone gehört.

- 2) Zu je zwei beliebigen Polygonen p_k und p'_k aus Mp_k ($k=m,n$) gibt es eine Bewegung oder eine Umkleppung, die p_k in p'_k überführt und die zugleich ein Homöomorphismus ist.

Definition: Zwei Darstellungen einer heterogenen Zerlegung der euklidischen Ebene in n -Ecke und m -Ecke gehören dann und nur dann zu derselben heterogenen Zerlegung, wenn es einen Homöomorphismus gibt, der die beiden Darstellungen ineinander überführt.

Damit verstehen wir also unter einer heterogenen Zerlegung der euklidischen Ebene eine Menge ineinander homöomorph abbildbarer Darstellungen.

Auch hier muß beachtet werden, daß die die Ecke eines Polygons der Zerlegung bildenden Strecken im Gegensatz zu den Gegebenheiten in einem einzeln vorliegenden Polygon durchaus einen Winkel von 180° einschließen können. - Enantiomorphe Darstellungen werden auch nach diesen Definitionen zur gleichen Zerlegung gerechnet.

2. Aufstellen diophantischer Gleichungen

Unter spezialisierenden Bedingungen lassen sich die Möglichkeiten für Zerlegungen mit mehreren Flächenarten leicht angeben. So fand schon Badoureaux¹⁴⁾ und nach ihm Andreini¹⁵⁾, daß die Frage nach allen Zerlegungen mit beliebig vielen regulären Flächen unter der Bedingung, daß in jedem Eckpunkt genau i Flächen zusammenstoßen, mit Hilfe von wenigen einfachen diophantischen Gleichungen zu beantworten ist.

Da der Innenwinkel in einem regulären n -Eck $(1 - \frac{2}{n}) \cdot \pi$ beträgt, so folgt, wenn i Flächen in jeder Ecke zusammenstoßen,

$$\sum_{v=1}^i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_v} \right) = 1 \quad \text{und daraus} \quad \sum_{v=1}^i \frac{1}{n_v} = \frac{i-2}{2}.$$

Nun sieht man hieraus wiederum sofort, daß $i > 6$ nicht möglich ist. Die Lösungsmenge der verbleibenden Gleichungen ist gleich der, die sich für den Fall einer homogenen Ebenenzerlegung mittels Flächen einer Art ergibt.

Wir müssen bei der allgemeineren Art unserer Fragestellung wieder auf den Eulerschen Polyedersatz zurückgreifen, um notwendige, leider auch hier - wie im Falle der homogenen Ebenenteilung - nicht auch hinreichende Bedingungen für mögliche Ebenenzerlegungen zu finden.

Wegen unserer Bedingung, daß jedes Exemplar einer Flächenart umgebungstreu in jedes andere der gleichen Art transformierbar sein muß, ist es selbstverständlich, daß jedes n -Eck der Zerlegung von einer gleichen Zahl von m -Ecken der Zerlegung in gleicher Weise umgeben sein muß. Wir können demnach immer einen "Grundbereich" der Ebene finden, der aus Flächen beider Arten zusammengesetzt ist, so daß man mit ihm die Ebene lückenlos und überlappungsfrei ausfüllen kann. - Wir fassen nun einen derartigen Bereich ins Auge. In diesem Bereich mögen a m -Ecke vorliegen und auf jedes dieser m -Ecke mögen z n -Ecke entfallen, wobei z selbstverständlich eine natürliche oder eine rationale Zahl ist. Für diesen Grundbereich ist also der Flächenanteil der m -Ecke an der Eulerschen Polyedergleichung

$$e - k + f = \chi$$

gleich a , der Flächenanteil der n -Ecke az , der Kantenanteil der m -Ecke $a \cdot \frac{m}{2}$, der Kantenanteil der n -Ecke $az \cdot \frac{n}{2}$, der Eckenanteil der m -Ecke $a \cdot \sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q}$ und der Eckenanteil der n -Ecke $a \cdot z \cdot \sum_{q=1}^z \frac{1}{j_q}$, wobei hier mit i_q die Wertigkeit des q -ten Eckpunktes des m -Ecks, mit j_q die Wertigkeit des q -ten Eckpunktes des n -Ecks bezeichnet ist. - Selbstverständlich ist es gleichgültig, bei welchem Eckpunkt einer Fläche mit dem Zählen begonnen wird.

Der Anteil eines Grundbereichs an der linken Seite der Eulerschen Gleichung beträgt also

$$a \cdot \left(\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} - \frac{m}{2} + 1 \right) + a \cdot z \cdot \left(\sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} - \frac{n}{2} + 1 \right),$$

so daß sich die Gleichung in der Form

$$\sum_{\text{alle Grundbereiche}} \left(\left(\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} - \frac{m}{2} + 1 \right) + z \cdot \left(\sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} - \frac{n}{2} + 1 \right) \right) = \frac{\chi}{a}$$

schreiben läßt.

Aus dieser Gleichung läßt sich nun wie bei der zur homogenen Zerlegung bezüglich einer Flächenart gehörenden durch Grenzwertbildung die Gleichung

$$(4) \quad \left(\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} - \frac{m}{2} + 1 \right) + z \cdot \left(\sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} - \frac{n}{2} + 1 \right) = 0$$

gewinnen.

Für den zum besprochenen dualen Fall der Zerlegung der Ebene in ein Netzwerk mit zwei topologisch verschiedenen Arten von Eckpunkten, Punkten, in denen drei oder mehr Kanten zusammenstoßen, gilt analog

$$(5) \quad \left(\sum_{q=1}^i \frac{1}{m_q} - \frac{i}{2} + 1 \right) + u \cdot \left(\sum_{q=1}^j \frac{1}{n_q} - \frac{j}{2} + 1 \right) = 0.$$

In dieser Gleichung ist u wiederum eine natürliche oder rationale Zahl, i und j sind die Wertigkeiten der Punkte beider Arten und m_q und n_q bedeuten die Eckenzahlen der q-ten um einen i-wertigen bzw. um einen j-wertigen Punkt liegenden Fläche.

Betrachtet man eine Zerlegung der Ebene derart, daß zwei topologisch verschiedene Arten von Kanten auftreten, so ergibt sich

$$(6) \quad \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right) + v \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m'} + \frac{1}{n'} - 1 \right) = 0,$$

wobei i und j die Wertigkeiten der Endpunkte der Kanten

der einen Art, n und m die Eckenanzahlen der durch eine dieser Kanten getrennten Polygone bedeuten und k, l, n', m' die entsprechenden Größen für die zweite Kantenart darstellen; v ist wiederum eine natürliche oder rationale Zahl.

3. Diskussion der Gleichungen

Die Gleichungen (4) bis (6) haben zwar im wesentlichen die gleiche Form wie die Gleichungen (1) bis (3), werden aber durch die viel größere Anzahl zu bestimmender Parameter bei weitem schwieriger zu handhaben - doch ist das nicht ihr größter Mangel. Eine wirklich ernste Schwierigkeit wird im folgenden sichtbar werden.

Zunächst können wir feststellen, in welchen Fällen die Gleichung (4) von vornherein nicht gilt, und zwar ist das trivialerweise dann der Fall, wenn beide durch Klammerung hervorgehobenen Summanden zugleich größer oder kleiner als null sind oder wenn nur einer dieser Summanden gleich null ist.

Es sei also $\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} - \frac{m}{2} + 1 < 0$ und zugleich $\sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} - \frac{n}{2} + 1 < 0$.
Da diese Aussage äquivalent mit der Aussage
 $\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} < \frac{m-2}{2}$ und zugleich $\sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} < \frac{n-2}{2}$
ist und nach unseren Voraussetzungen

$$\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} \leq \frac{m}{3}, \quad \sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} \leq \frac{n}{3}$$

gilt, so folgt, daß Gleichung (4) sicherlich nicht für $m > 6$ und zugleich $n > 6$ gilt.

Es kann also keine mit unseren Voraussetzungen verträgliche Zerlegung existieren, in der beide Flächenarten aus Polygonen mit einer Eckenzahl, die größer als sechs ist, bestehen. - Diese Tatsache leitete Laves schon für den Sonderfall her, daß alle Eckpunkte 3-wertig sind.²⁾

Ebenso überlegt man sich leicht, daß nicht zugleich

$$\sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} < \frac{m-2}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} = \frac{n-2}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. } \sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} &> \frac{m-2}{2} & \text{und } \sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} &= \frac{n-2}{2} , \\ \text{bzw. } \sum_{q=1}^m \frac{1}{i_q} &> \frac{m-2}{2} & \text{und } \sum_{q=1}^n \frac{1}{j_q} &> \frac{n-2}{2} \end{aligned}$$

gelten kann.

Diese letzten Aussagen können im Einzelfall zum Auffinden einer Zerlegung durchaus nützlich sein, liefern aber über die Tatsache hinaus, daß keine Zerlegung in m -Ecke und n -Ecke mit $m \geq 6$ und $n > 6$ möglich sind, keine weiteren allgemeinen oberen Schranken für die Eckenzahlen.

Abschätzungen, die aber von einer Reihe von Parametern abhängen, und so ebenfalls nur im Einzelfall nützlich sind, findet man, wenn man in Gleichung (4) für m die Werte 3, 4, 5 und 6 einsetzt. Man erhält

$$\begin{aligned} m=3, & \quad n \leq 6 + \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} - \frac{1}{2} \right), \\ m=4, & \quad n \leq 6 + \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} - 1 \right), \\ m=5, & \quad n \leq 6 + \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} + \frac{1}{i_5} - \frac{3}{2} \right), \\ m=6, & \quad n \leq 6 + \frac{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2} + \frac{1}{i_3} + \frac{1}{i_4} + \frac{1}{i_5} + \frac{1}{i_6} - 2 \right). \end{aligned} +$$

-Analoge Überlegungen gelten für den Fall der heterogenen Zerlegung der Ebene in Netzwerke mit zwei topologisch verschiedenen Arten von Verzweigungspunkten, also für Gleichung (5).

Da es also von vornherein nicht möglich ist, aus den Gleichungen (4) und (5) eine obere Schranke für die Eckenzahl zu gewinnen, die ein Polygon haben kann, um mit 3-, 4- oder 5-Ecken zusammen eine Ebenenzerlegung der von uns ins Auge gefaßten Art zu bilden, so bleibt - will man die Untersuchung mit Hilfe der hergeleiteten diophantischen Gleichungen führen - von diesen noch die Gleichung (6). Zunächst scheint dieser Weg durchaus gangbar; denn hat man alle Zerlegungen der Ebene in Netzwerke hinsichtlich der Kanten bei Vorliegen von nur zwei Flächenarten, so

+) Selbstverständlich kann für $m = 6$ nur $n \leq 6$ folgen.

hat man damit natürlich auch alle möglichen Ebenenzerlegungen mit zwei Flächenarten. - Eine notwendige Voraussetzung zu diesem Vorgehen ist es jedoch, eine obere Schranke für die Anzahl der bei einer Zerlegung in zwei Flächenarten auftretenden Klassen jeweils topologisch äquivalenter Kanten zu finden - das ist uns leider nicht gelungen.

Mit Hilfe der aus der Eulerschen Polyedergleichung folgenden diophantischen Gleichungen (4) bis (6) lassen sich also zwar bei Vereinbarung einschränkender Bedingungen die dann möglichen Ebenenzerlegungen mit zwei topologisch verschiedenen Flächenarten herleiten - im zuletzt besprochenen Fall etwa durch Festsetzung der Anzahl zu berücksichtigender (topologisch) verschiedener Kantenarten -, setzt man aber für die Zerlegung lediglich voraus, daß keine konvexen Flächen und keine zweiwertigen Polygoneckpunkte auftreten sollen, so erweisen sich diese Gleichungen als die Menge der wirklich zeichenbaren Lösungen nicht genügend bestimmend. Die Gleichungen geben nur notwendige, nicht auch hinreichende Bedingungen, so daß aus der Menge der numerischen Lösungen durch Konstruktion die wirklichen Ebenenzerlegungen ausgesondert werden müssen - und der hierzu erforderliche Zeitaufwand übersteigt den bei der homogenen Ebenenzerlegung notwendigen um Größenordnungen. - Gravierender als dieses stellt sich aber der - ausschließlichen - Benutzung dieser diophantischen Gleichungen zur Herleitung aller möglichen Ebenenzerlegungen der uns interessierenden Art in den Weg, daß aus ihnen keine obere Schranke für die Anzahl der Ecken eines Polygons herleitbar ist, das mit einem 3-Eck, 4-Eck oder 5-Eck gemeinsam in einer Ebenenzerlegung auftreten kann. - Wir werden uns also einer anderen Methode zur Lösung unseres Problems bedienen müssen.

4. Diskussion der Möglichkeit der Herleitung heterogener Ebenenzerlegungen mit Hilfe der Ebenengruppen

Wie Fedorow, Schoenflies und Barlow Ende des 19. Jahrhunderts unabhängig voneinander zeigten, gibt es im 3-dimensionalen Raum 20 Bewegungs- oder Raumgruppen, unendliche

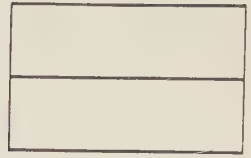
diskontinuierliche Gruppen kongruenter Transformationen, denen im Zweidimensionalen 17 Bewegungsgruppen entsprechen. ^{27, 28)} Schon Schoenflies wies auf den engen Zusammenhang zwischen den Raumgruppen und den Raumteilungen hin ²¹⁾, und Pólya gibt als Erläuterung der 17 "Ebenen-
gruppen" 17 Ebenenzerlegungen an - allerdings unter Zulassung konvexer Flächen und zweiwertiger Polygoneckpunkte. ²⁷⁾ Nachdem dann Haag die von ihm hergeleiteten "Gebiete" und Fedorows "Planigone" in ihren Beziehungen zu den 17 Ebenengruppen diskutiert hatte ²⁹⁾, wurde von Laves als Beispiel möglichen Vorgehens die Ableitung der verschiedenen in der Ebenengruppe $p2gg$ auftretenden Zerlegungen der unendlichen Ebene in topologisch gleichartige Wirkungsbereiche gegeben ³⁰⁾.

Da nun jeder Darstellung einer (homogenen oder heterogenen) Ebenenzerlegung selbstverständlich genau eine Ebenengruppe zugeordnet werden kann, so liegt auch in unserem Falle der Gedanke nahe, die möglichen Ebenenzerlegungen mit zwei Flächenarten mit Hilfe der 17 diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der Ebene herzuleiten. Zu dem Zweck werden in Abb. 4 die Symmetrieverhältnisse an Hand der zu den Ebenengruppen gehörenden Symmetrieelemente und ihrer Anordnung anschaulich gemacht. - Es wird sich bei der Herleitung der möglichen Zerlegungen mit Hilfe der 17 Ebenengruppen im wesentlichen also darum handeln festzustellen, welche Anordnungen von zwei topologisch verschiedenen konvexen Flächen die in Abb. 4 angegebenen Symmetriegerüste zulassen.

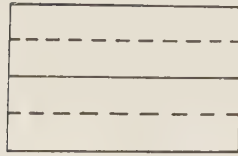
Mit dem Vorgehen mittels der Gleichungen (4) bis (6) hat diese Art der Untersuchung den Nachteil gemeinsam, daß keine obere Schranke für die Anzahl der Lösungen herleitbar ist, doch ist dieser Nachteil hier nicht gravierend; denn betrachtet man die Lagen, die ein 3-Eck, 4-Eck, 5-Eck oder 6-Eck hinsichtlich des jeweiligen Symmetriegerüstes haben kann - und die Anzahl der topologisch verschiedenen Lagemöglichkeiten ist selbstverständlich jeweils endlich -,



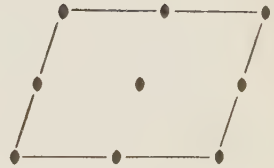
pg



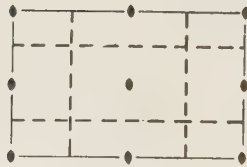
pm



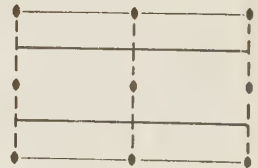
cm



$p2$



$p2gg$



$p2mg$



$p2mm$

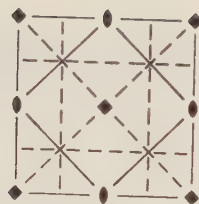


$c2mm$

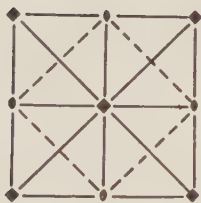
Abb. 4(a) Symmetrierüste der Ebenengruppen pg , pm , cm , $p2$, $p2gg$, $p2mg$, $p2mm$ und $c2mm$ (33)
(Die dünneren Linien bedeuten nur Abgrenzungen der Elementarzelle und sind für uns ohne Bedeutung)



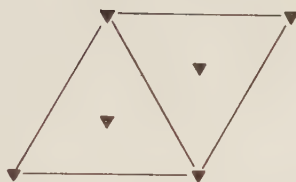
$p4$



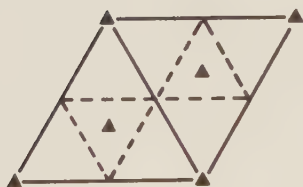
$p4gm$



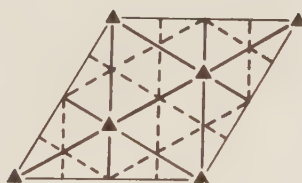
$p4mm$



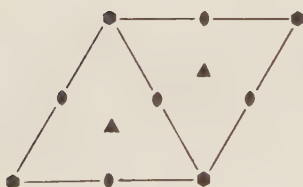
$p3$



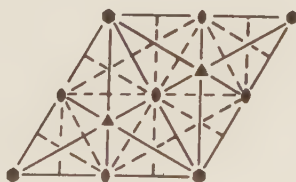
$p31m$



$p3m1$



$p6$



$p6mm$

Abb. 4(b) Symmetriegerüste der Ebenengruppen $p4$, $p4gm$, $p4mm$, $p3$, $p31m$, $p3m1$, $p6$, $p6mm$. - Siehe Bemerkung unter Abb. 4(a) -

so findet man in jedem Einzelfall auch für die Polygone der zweiten Art unter den von uns vereinbarten Bedingungen eine maximale Eckenzahl.

Hat man nun alle Zerlegungen der von uns betrachteten Art gefunden, die mit dem Symmetriegerüst der Ebenengruppe p_n verträglich sind - wobei n für 2, 3, 4 und 6 steht -, so hat man selbstverständlich damit zugleich auch alle Zerlegungen erhalten, die zusätzlich Spiegelgeraden oder Gleitspiegelgeraden erfordern. Wir können uns also auf die Betrachtung der Symmetriegerüste der Gruppen p_6 , p_4 , p_3 , p_2 , c_m , p_m , p_g , p_1 beschränken.

Es ist allgemein die Faktorgruppe einer Bewegungsgruppe nach der in ihr enthaltenen Translationsgruppe isomorph der orthogonalen Gruppe der in der Bewegungsgruppe enthaltenen rotativen Bestandteile.³¹⁾ Betrachtet man in einer der Gruppen p_6 , p_4 , p_3 , p_2 nun eine zyklische Untergruppe der erwähnten Gruppe der rotativen Bestandteile, so bleibt ein Punkt fest. Man kann diesen Punkt als Durchstoßpunkt einer Drehachse senkrecht zur Ebene durch diese Ebene deuten, um die die Operationen der jeweiligen Untergruppe ausgeführt werden. Stellt man diese Überlegungen für alle Untergruppen an, so kommt man zu den entsprechenden Symmetriegerüsten der Abb. 4.

Bezeichnet man nun mit f_1 und f_2 die nicht topologisch äquivalenten Polygone, so kann der Fixpunkt einer herausgegriffenen zyklischen Untergruppe - oder, was dieser Aussage äquivalent ist, der Durchstoßpunkt der zugehörigen Drehachse - ein innerer Punkt von f_1 , ein innerer Punkt von f_2 , ein Randpunkt nur von f_1 , ein Randpunkt nur von f_2 oder ein gemeinsamer Randpunkt von f_1 und f_2 sein. Betrachtet man alle zyklischen Untergruppen einer der zu behandelnden Gruppen p_6 , p_4 , p_3 , p_2 , so hat man auf diese Weise eine vollständige Fallunterscheidung nach der Lage der Flächen relativ zu den Symmetrieelementen.

Unter dem Einfluß der Ebenengruppe p_m bleiben zwei Scharen

von Geraden jeweils punktweise fest, und zwar derart, daß die Geraden der einen Art durch Spiegelung an denen der anderen Art ineinander übergehen. Man kann nun eine vollständige Fallunterscheidung nach der Lage von f_1 und f_2 bezüglich dieser Fixgeraden treffen, wobei selbstverständlich eine Fläche höchstens mit einer solchen Spiegelgeraden innere Punkte gemeinsam haben kann.

Wendet man die Ebenengruppe pg auf die Punkte der Ebene an, so bleiben zwei Scharen von Geraden zwar nicht punktweise, aber jeweils als ganzes fest, derart, daß die Geraden der einen Schar durch Gleitspiegelung an denen der anderen jeweils ineinander übergehen. - Zwar lassen sich Darstellungen von Zerlegungen konstruieren, in denen Flächen von einer beliebigen Anzahl von Gleitspiegelgeraden durchsetzt werden, jedoch können diese Darstellungen - da ja nur zwei Arten von unter sich äquivalenten Gleitspiegelgeraden vorliegen - immer auf solche zurückgeführt werden, die von höchstens zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt werden. Man kann nun wieder eine vollständige Fallunterscheidung nach der Lage von f_1 und f_2 bezüglich dieser Geraden vornehmen.

Die Ebenengruppe cm läßt eine Schar von Geraden punktweise (Spiegelgeraden), eine andere Schar zwar nicht punktweise, aber wiederum als ganzes fest (Gleitspiegelgeraden). - Auch hier kann eine Fläche natürlich wiederum höchstens von einer Spiegelgeraden - und höchstens von zwei Gleitspiegelgeraden - durchsetzt werden. Auch hier läßt sich, wie in den vorigen Fällen, eine vollständige Fallunterscheidung vornehmen.

Die Gruppe $p1$ läßt die ganze Ebene unverändert, so daß man hier lediglich die Periodizität neben der Forderung nach topologischer Äquivalenz und der Einschränkung auf konvexe Flächen und auf eine Wertigkeit der Polygoneckpunkte, die größer als zwei ist, benutzen kann.

Wir wollen nun noch einen Hilfsbegriff definieren, der sich bei der praktischen Arbeit als sehr nützlich erwiesen hat.

Definition: Unter dem Motiv einer Fläche einer Zerlegungsdarstellung verstehen wir dasjenige Polygon, das vorliegt, wenn wir die Fläche aus dem Zusammenhang innerhalb der Darstellung herausgelöst betrachten.

So ist in dem rechten Bild der Abb. 2 (Seite 9) das Motiv des 6-Ecks ein 4-Eck.

Bei den praktischen Untersuchungen werden wir derartige Motive in ihren möglichen Anordnungen zu den Symmetrieelementen untersuchen, werden also zulassen, daß durch die Aneinanderlagerung von Flächen weitere Eckpunkte entstehen, und zwar gehen wir so vor, daß wir zunächst als Motiv der Flächen einer Art das Polygon mit der niedrigst möglichen Eckenzahl betrachten und dann untersuchen, welche Motive dabei für die Flächen der zweiten Art noch möglich sind; dann erhöhen wir die Eckenzahl des "Ausgangsmotivs" und stellen wiederum fest, welche Motive nun für die Flächen der zweiten Art in Frage kommen - usw. In jedem Einzelfall findet man dann - unter Berücksichtigung der Forderungen, daß nur zwei Flächenarten vorliegen dürfen, daß keine konkaven Flächen und daß keine zweiwertigen Polygoneckpunkte in Betracht zu ziehen sind - stets für beide Flächen Motive mit maximal möglichen Eckenzahlen. - Dieses Vorgehen bietet auch gewisse Kontrollmöglichkeiten, da ja bei Variation des "Ausgangsmotivs" in vielen Fällen die gleiche Zerlegung resultiert.

Um nun die Aufzählung der Fallunterscheidungen nicht zu langatmig und unübersichtlich zu gestalten, werden wir in ihr die Spezifikation der Motive, die in jedem Fall ja - wie oben angedeutet - stattfindet, nicht aufführen.

Selbstverständlich ist es bei solch einer Fallunterscheidung - wenn sie nur vollständig ist - immer willkürlich, wie fein die einzelnen Fälle unterteilt werden. Die nachfolgende, sehr differenzierte Einteilung hat sich als sehr nützlich erwiesen.

5. Fallunterscheidungen hinsichtlich der relativen Lage der voneinander verschiedenen Flächen bezüglich der zu den Ebenengruppen gehörenden Symmetriegerüste

Bei den nun folgenden Fallunterscheidungen sind nach IV 5 nur die Symmetriegerüste von p_6 , p_4 , p_3 , p_2 , cm , pm , pg und p_1 zu betrachten.

p_6

I Die 6-zählige Achse durchsticht f_1 , die dreizählige Achse durchsticht f_2

I1 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

- 1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1
- 2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2
- 3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

I2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter I1

I3 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 4$

- 1) - 3) wie unter I1

II Die 6-zählige Achse durchsticht f_1 , die 2-zählige Achse durchsticht f_2

II1 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

- 1) Die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1
- 2) Die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2
- 3) Die 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

II2 Die 3-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 3$

- 1) - 3) wie unter II1

III Die 3-zählige Achse durchsticht f_1 , die 2-zählige Achse durchsticht f_2

III1 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1
- 2) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2
- 3) Die 6-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

III2 Die 6-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 6$

- 1) - 3) wie unter III1

IV Die 6-zählige Achse durchsticht f1

IV1 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

IV1.1 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

- 1) Die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - a) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - b) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - c) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
- 2) Die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - a) - c) wie unter 1)
- 3) Die 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
 - a) - c) wie unter 1)

IV1.2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.3 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.4 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 6$

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV2 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

IV2.1 - IV2.4 wie IV1.1 - IV1.4

IV3 Die 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 6$

IV3.1 - IV3.4 wie IV1.1 - IV1.4

V Die 3-zählige Achse durchsticht f1

V1 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

V1.1 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

- 1) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - a) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - b) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - c) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und f2
- 2) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - a) - c) wie unter 1)
- 3) Die 6-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und f2

V1.2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter V1.1

V1.3 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter V1.1

V1.4 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt
mit $m > 6$

1) - 3) wie unter V1.1

V2 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

V2.1 - V2.4 wie V1.1 - V1.4

V3 Die 6-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt
mit $m > 12$

V3.1 - V3.4 wie V1.1 - V1.4

VI Die 2-zählige Achse durchsticht f1

VI1 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

VI1.1 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

1) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

a) Die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

b) Die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2

c) Die 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und f2

2) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2

a) - c) wie unter 1)

3) Die 6-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und f2

a) - c) wie unter 1)

VI1.2 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI1.3 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI1.4 Die 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt
mit $m > 9$

1) - 3) wie unter VI1.1

VI2 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

VI2.1 - VI2.4 wie VI1.1 - VI1.4

VI3 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 18-wertigen Punkt

VI3.1 - VI3.4 wie VI1.1 - VI1.4

VI4 Die 6-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt
mit $m > 18$

VI4.1 - VI4.4 wie VI1.1 - VI1.4

VII Keine Flächenart wird von einer Achse durchstoßen

VII1 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

VII1.1 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

1) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

a) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 ,
die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

a1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

a2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

a3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und f_2

b) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 ,
die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

b1) - b3) wie a1) - a3)

c) Die 6-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und f_2 ,
die 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

c1) - c3) wie a1) - a3)

d) Die 6-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 ,
die 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und f_2

d1) - d3) wie a1) - a3)

e) Die 6-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und f_2 ,
die 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und f_2

e1) - e3) wie a1) - a3)

2) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

a) - e) wie unter 1)

3) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - e) wie unter 1)

4) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

a) - e) wie unter 1)

- 5) Die 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 8$
- a) - e) wie unter 1)
- VII1.2 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt
- 1) - 5) wie unter VII1.1
- VII1.3 Die 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt
- 1) - 5) wie unter VII1.1
- VII1.4 Die 3-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 9$
- 1) - 5) wie unter VII1.1
- VII2 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt
- VII2.1 - VII2.4 wie VII1.1 - VII1.4
- VII3 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 18-wertigen Punkt
- VII3.1 - VII3.4 wie VII1.1 - VII1.4
- VII4 Die 6-zählige Achse durchsticht einen 24-wertigen Punkt
- VII4.1 - VII4.4 wie VII1.1 - VII1.4
- VII5 Die 6-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 24$
- VII5.1 - VII5.4 wie VII1.1 - VII1.4

p4

- I Eine 4-zählige Achse durchsticht f_1 , die andere 4-zählige Achse durchsticht f_1
- I1 Die 2-zählige Achse durchsticht f_2
- I2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt
- 1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1
- 2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2
- 3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2
- I3 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt
- 1) - 3) wie unter I2
- I4 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 4$
- 1) - 3) wie unter I2

II Eine 4-zählige Achse durchsticht f1, die andere 4-zählige Achse durchsticht f2

II1 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

- 1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- 2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
- 3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

II2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 2$

- 1) - 3) wie unter II1

III Eine 4-zählige Achse durchsticht f1, die 2-zählige Achse durchsticht f2

III1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

- 1) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- 2) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
- 3) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

III2 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 4$

- 1) - 3) wie unter III1

IV Eine 4-zählige Achse durchsticht f1

IV1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

IV1.1 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

- 1) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

- a) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- b) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
- c) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

- 2) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2

- a) - c) wie unter 1)

- 3) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

- a) - c) wie unter 1)

IV1.2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.3 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.4 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.5 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 8$

1) - 3) wie unter IV1.1

IV2 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

IV2.1 - IV2.5 wie IV1.1 - IV1.5

IV3 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 8$

IV3.1 - IV3.5 wie IV1.1 - IV1.5

V Die 2-zählige Achse durchsticht f_1

V1 Eine 4-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

V1.1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) Die erste 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

a) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

b) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

c) Die zweite 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

2) Die erste 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

a) - c) wie unter 1)

3) Die erste 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

a) - c) wie unter 1)

V1.2 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter V1.1

V1.3 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 8$

1) - 3) wie unter V1.1

V2 Eine 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

V2.1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter V1.1

V2.2 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter V1.1

V2.3 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$

V3 Eine 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$

V3.1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n > 12$

1) - 3) wie unter V1.1

VI Keine Flächenart wird von einer Achse durchstoßen

VI1 Eine 4-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

VI1.1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

a) Die erste 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1, die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2

a1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

a2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2

a3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

b) Die erste 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1, die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

b1) - b3) wie a1) - a3)

- c) Die erste 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die zweite 4-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - c1) - c3) wie a1) - a3)
 - d) Die erste 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die zweite 4-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
 - d1) - d3) wie a1) - a3)
- 2) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter 1)
- 3) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter 1)
- 4) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter 1)
- 5) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 10-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter 1)
- 6) Die 2-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter 1)
- 7) Die 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$
 - a) - d) wie unter 1)
- VI1.2 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt
 - 1) - 7) wie unter VI1.1
- VI1.3 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt
 - 1) - 7) wie unter VI1.1
- VI1.4 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$
 - 1) - 7) wie unter VI1.1
- VI2 Eine 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt
 - VI2.1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt
 - 1) - 7) wie unter VI1.1

VI2.2 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

1) - 7) wie unter VI1.1

VI2.3 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen 16-wertigen Punkt

1) - 7) wie unter VI1.1

VI2.4 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 16$

1) - 7) wie unter VI1.1

VI3 Eine 4-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 12$

VI3.1 Die zweite 4-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 12$

1) - 7) wie unter VI1.1

p2

I Alle drei 3-zähligen Achsen durchstechen f1

II Die erste und die zweite 3-zählige Achse durchstechen f1, die dritte 3-zählige Achse durchsticht f2

III Die erste und die zweite 3-zählige Achse durchstechen f1

III1 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

- 1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- 2) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
- 3) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

III2 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter III1

III3 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

1) - 3) wie unter III1

IV Eine 3-zählige Achse durchsticht f1

IV1 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

IV1.1 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

- 1) Die zweite 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - a) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - b) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - c) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
- 2) Die zweite 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - a) - c) wie unter 1)
- 3) Die zweite 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
 - a) - c) wie unter 1)

IV1.2 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.3 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV1.4 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 9$

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV2 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

IV2.1 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV2.2 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV2.3 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 9$

- 1) - 3) wie unter IV1.1

IV3 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 9$

IV3.1 Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 9$

- 1) - 3) wie unter IV1.1

V Keine Flächenart wird von einer Achse durchstoßen

V1 Eine 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

V1.1 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt

- 1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 3-wertigen Punkt
 - a) Die erste 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1, die zweite 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - a1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - a2) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
 - a3) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

b) Die erste 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1, die zweite 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

b1) - b3) wie a1) - a3)

c) Die erste 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die zweite 3-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

c1) - c3) wie a1) - a3)

d) Die erste 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die zweite 3-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

d1) - d3) wie a1) - a3)

2) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

3) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

4) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

5) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$

a) - d) wie unter 1)

V1.2 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter V1.1

2) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt

a) - d) wie unter V1.1

3) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

a) - d) wie unter V1.1

4) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$

a) - d) wie unter V1.1

V1.3 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 9$

1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 9$

a) - d) wie unter V1.1

V2 Eine 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

V2.1 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter V1.1
 - 2) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 9-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter V1.1
 - 3) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt
 - a) - d) wie unter V1.1
 - 4) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 12$
 - a) - d) wie unter V1.1
- V2.2 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 9$
- 1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 9$
 - a) - d) wie unter V1.1
- V3 Eine 3-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 9$
- V3.1 Die zweite 3-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 9$
- 1) Die dritte 3-zählige Achse durchsticht einen q-wertigen Punkt mit $q \geq 9$
 - a) - d) wie unter V1.1

p2

- I Alle vier 2-zählige Achsen durchstechen f1
- II Drei 2-zählige Achsen durchstechen f1, die vierte 2-zählige Achse durchsticht f2
- III Zwei 2-zählige Achsen durchstechen f1, die dritte und vierte 2-zählige Achsen durchstechen f2
- IV Drei 2-zählige Achsen durchstechen f1
- IV1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt
- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
 - 2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2

3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

IV2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 2$

1) - 3) wie unter IV1

V Zwei 2-zählige Achsen durchstechen f_1 , die dritte 2-zählige Achse durchsticht f_2

V1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter IV1

V2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter IV1

V3 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter IV1

V4 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 6$

1) - 3) wie unter IV1

VI Zwei 2-zählige Achsen durchstechen f_1

VI1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

VI1.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

1) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

a) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

b) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

c) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

2) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

a) - c) wie unter 1)

3) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

a) - c) wie unter 1)

VI1.2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI1.3 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI1.4 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI1.5 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

1) - 3) wie unter VI1.1

VI2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

VI2.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI2.2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI2.3 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI2.4 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

1) - 3) wie unter VI1.1

VI3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

VI3.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VI3.2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

1) - 3) wie unter VI1.1

VI4 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

VI4.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 8$

1) - 3) wie unter VI1.1

VII Eine 2-zählige Achse durchsticht f_1 , die zweite 2-zählige Achse durchsticht f_2

VII1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

VII1.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VII1.2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VII1.3 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 4$

1) - 3) wie unter VI1.1

VII2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

VII2.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) - 3) wie unter VI1.1

VII2.2 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 4$

1) - 3) wie unter VI1.1

VII3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

VII3.1 Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 6$

1) - 3) wie unter VI1.1

VIII Eine 2-zählige Achse durchsticht f_1

VIII1 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

VIII1.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

- a) Die zweite 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1, die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
- a1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- a2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f2
- a3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
- b) Die zweite 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1, die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- b1) - b3) wie a1) - a3)
- c) Die zweite 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1
- c1) - c3) wie a1) - a3)
- d) Die zweite 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die dritte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2
- d1) - d3) wie a1) - a3)
- 2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt
- a) - d) wie unter 1)
- 3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt
- a) - d) wie unter 1)
- 4) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt
- a) - d) wie unter 1)
- 5) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 10-wertigen Punkt
- a) - d) wie unter 1)
- 6) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 10$
- a) - d) wie unter 1)

VIII1.2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

a) - d) wie unter VIII1.1

2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter VIII1.1

3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m \geq 6$

a) - d) wie unter VIII1.1

VIII1.3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m \geq 6$

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n -wertigen Punkt mit $n \geq 6$

a) - d) wie unter VIII1.1

VIII2 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

VIII2.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

a) - d) wie unter VIII1.1

2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter VIII1.1

3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m \geq 6$

a) - d) wie unter VIII1.1

VIII2.2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter VIII1.1

2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

a) - d) wie unter VIII1.1

VIII2.3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 8$

a) - d) wie unter VIII1.1

VIII3 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

VIII3.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 6$

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen q-wertigen Punkt mit $q \geq 6$

a) - d) wie unter VIII1.1

IX Keine Flächenart wird von einer Achse durchstoßen

IX1 Eine 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

IX1.1 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

IX1.1.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt

a) Die erste 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 , die zweite 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

a1) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 , die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2

a2) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 , die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

a3) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2 , die vierte 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

a4) Die dritte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2 , die vierte 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2

b) Die erste 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 , die zweite 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1

b1) - b4) wie a1) - a4)

c) Die erste 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die zweite 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f1

c1) - c4) wie a1) - a4)

d) Die erste 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2, die zweite 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f1 und von f2

d1) - d4) wie a1) - a4)

2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

4) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

5) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 10-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

6) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt

a) - d) wie unter 1)

7) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$

a) - d) wie unter 1)

IX1.1.2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

- 4) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 10-wertigen Punkt
a) - d) wie unter IX1.1.1
- 5) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 12-wertigen Punkt
a) - d) wie unter IX1.1.1
- 6) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 12$
a) - d) wie unter IX1.1.1

IX1.1.3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt
a) - d) wie unter IX1.1.1
- 2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 6$
a) - d) wie unter IX1.1.1

IX1.1.4 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 8$
a) - d) wie unter IX1.1.1

IX1.2 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

IX1.2.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt
a) - d) wie unter IX1.1.1
- 2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt
a) - d) wie unter IX1.1.1
- 3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt
a) - d) wie unter IX1.1.1

- 4) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX1.2.2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

- 2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

- 3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX1.2.3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 8$

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 8$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX1.3 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

IX1.3.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 6$

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen q-wertigen Punkt mit $q \geq 6$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX2 Eine 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

IX2.1 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

IX2.1.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

- 1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

- 2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

3) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

4) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 8$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX2.1.2 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 6-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX2.1.3 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen 8-wertigen Punkt

a) - d) wie unter IX1.1.1

2) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m > 8$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX2.1.4 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 10$

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 10$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX2.2 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

IX2.2.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 6$

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen q-wertigen Punkt mit $q \geq 6$

a) - d) wie unter IX1.1.1

IX3 Eine 2-zählige Achse durchsticht einen m-wertigen Punkt mit $m \geq 6$

IX3.1 Die zweite 2-zählige Achse durchsticht einen n-wertigen Punkt mit $n \geq 6$

IX3.1.1 Die dritte 2-zählige Achse durchsticht einen q-wertigen Punkt mit $q \geq 6$

1) Die vierte 2-zählige Achse durchsticht einen r-wertigen Punkt mit $r \geq 6$

cm

- I f1 und f2 werden jeweils von einer Spiegelgeraden und zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt
- I1 f1 und f2 haben mit je zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
- I2 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam, f2 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- I3 f1 und f2 haben mit je zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- I4 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam, f2 hat keinen Randpunkt mit einer Spiegelgeraden gemeinsam
- I5 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam, f2 hat keinen Randpunkt mit einer Spiegelgeraden gemeinsam
- I6 f1 und f2 haben mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- II f1 wird von einer Spiegelgeraden und zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von einer Spiegelgeraden durchsetzt
- II1 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
- 1) f2 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
 - 2) f2 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
 - 3) f2 hat mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- II2 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- 1) - 3) wie unter II1
- II3 f1 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 1) - 3) wie unter II1
- III f1 wird von einer Spiegelgeraden und zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von einer Gleitspiegelgeraden durchsetzt

III1 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) f2 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
- 2) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer zweiten Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam
- 3) f2 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- 4) f2 hat mit nur einer Spiegelgeraden (mehrere) Randpunkte gemeinsam
- 5) f2 hat mit nur einer Spiegelgeraden (genau) einen Randpunkt gemeinsam
- 6) f2 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

III2 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 6) wie unter III1

III3 f1 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 6) wie unter III1

IV f1 wird von einer Spiegelgeraden und zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von keiner Symmetriegeraden durchsetzt

IV1 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) f2 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
- 2) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere, mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam
- 3) f2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen, mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte gemeinsam
- 4) f2 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- 5) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 6) f2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen, mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 7) f2 hat mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 8) f2 hat mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen, mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 9) f2 hat mit keiner Symmetriegeraden einen Randpunkt gemeinsam

IV2 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 9) wie unter IV1

IV3 f2 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

1) - 9) wie unter IV1

V f1 wird nur von einer Spiegelgeraden durchsetzt, f2 wird nur von einer Spiegelgeraden durchsetzt

V1 f1 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

1) f2 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

2) f2 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

3) f2 hat mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

V2 f1 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

1) - 3) wie unter V1

V3 f1 hat mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

1) - 3) wie unter V1

VI f1 wird nur von einer Spiegelgeraden durchsetzt, f2 wird nur von einer Gleitspiegelgeraden durchsetzt

VI1 f1 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

1) f2 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

2) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere, mit einer zweiten genau einen Randpunkt gemeinsam

3) f2 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

4) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte gemeinsam, mit keiner zweiten Spiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam

5) f2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen, mit keiner zweiten Spiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam

6) f2 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

VI2 f1 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

1) - 6) wie unter VI1

VI3 f1 hat mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

1) - 6) wie unter VI1

VII f1 wird von einer Spiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von keiner Symmetriegeraden durchsetzt

VII1 f1 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) f2 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
- 2) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam
- 3) f2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt, mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte gemeinsam
- 4) f2 hat mit keiner Symmetriegeraden Randpunkte gemeinsam

VII2 f2 hat mit zwei Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VII3 f2 hat mit keiner Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VIII f1 wird von einer Gleitspiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von keiner Symmetriegeraden durchsetzt

VIII1 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VIII2 f1 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer zweiten Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VIII3 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VIII4 f1 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VIII5 f1 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie unter VII1

VIII6 f1 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

1) - 4) wie unter VII1

IX Keine Fläche wird von einer Symmetriegeraden durchsetzt.

IX1 f1 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) f2 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam
- 2) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam
- 3) f2 hat mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam
- 4) f2 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- 5) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 6) f2 hat mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 7) f2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam
- 8) f2 hat mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam
- 9) f2 hat mit keiner Symmetriegeraden einen Randpunkt gemeinsam

IX2 f1 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam

1) - 8) wie IX1 2) - 9)

IX3 f1 hat mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam

1) - 7) wie IX1 3) - 9)

IX4 f1 hat mit einer Spiegelgeraden und mit einer Gleitspiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

1) - 6) wie IX1 4) - 9)

IX5 f1 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen Randpunkt gemeinsam

1) - 5) wie IX1 5) - 9)

IX6 f1 hat mit einer Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen Randpunkt gemeinsam

1) - 4) wie IX1 6) - 9)

IX7 f1 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam

1) - 3) wie IX1 7) - 9)

IX8 f1 hat mit einer Gleitspiegelgeraden genau einen, mit keiner weiteren Symmetriegeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam

1) - 2) wie IX1 8) - 9)

pm

I f1 und f2 werden jeweils von einer Spiegelgeraden durchsetzt

I1 f1 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

1) f2 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

2) f2 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

3) f2 hat mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

I2 f1 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

1) f2 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

2) f2 hat mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

I3 f1 hat mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam, f2 hat mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

II f1 wird von einer Spiegelgeraden durchsetzt

II1 f1 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

1) f2 hat mit 2 Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 2) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere, mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam
- 3) f2 hat mit 2 Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam
- 4) f2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 5) f2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam
- 6) f2 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

II2 f1 hat mit 2 weiteren Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 6) wie unter II1

II3 f1 hat mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 6) wie unter II1

III Keine Fläche wird von einer Spiegelgeraden durchsetzt

III1 f1 hat mit 2 Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) - 6) wie II1 1) - 6)

III2 f1 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere, mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 5) wie II1 2) - 6)

III3 f1 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie II1 3) - 6)

III4 f1 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 3) wie II1 4) - 6)

III5 f1 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam

- 1) - 2) wie II1 5) - 6)

28

I f1 und f2 werden jeweils von zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt

I1 f1 hat mit 2 weiteren Gleitspiegelgeraden jeweils mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) f2 hat mit 2 weiteren Gleitspiegelgeraden jeweils mehrere Randpunkte gemeinsam
- 2) f2 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer zweiten genau einen Randpunkt gemeinsam
- 3) f2 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 4) f2 hat mit zwei weiteren Gleitspiegelgeraden jeweils genau einen Randpunkt gemeinsam
- 5) f2 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden genau einen, mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam
- 6) f2 hat mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

I2 f1 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer zweiten genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 5) wie I1 2) - 6)

I3 f1 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 4) wie I1 3) - 6)

I4 f2 hat mit zwei weiteren Gleitspiegelgeraden jeweils genau einen Randpunkt gemeinsam

- 1) - 3) wie I1 4) - 6)

I5 f2 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden genau einen, mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam

- 1) - 2) wie I1 5) - 6)

I6 f1 und f2 haben mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden Randpunkte gemeinsam

II f1 wird von zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von einer Gleitspiegelgeraden durchsetzt

II1 f1 hat mit zwei weiteren Gleitspiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam

- 1) - 6) wie I1 1) - 6)

- II2 f1 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit einer zweiten genau einen Randpunkt gemeinsam
- 1) - 6) wie I1 1) - 6)
- II3 f1 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam
- 1) - 6) wie I1 1) - 6)
- II4 f1 hat mit zwei weiteren Gleitspiegelgeraden jeweils genau einen Randpunkt gemeinsam
- 1) - 6) wie I1 1) - 6)
- II5 f2 hat mit einer weiteren Gleitspiegelgeraden genau einen, mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam
- 1) - 6) wie I1 1) - 6)
- II6 f2 hat mit keiner zusätzlichen Gleitspiegelgeraden Randpunkte gemeinsam
- 1) - 6) wie I1 1) - 6)
- III f1 wird von zwei Gleitspiegelgeraden durchsetzt, f2 wird von keiner Gleitspiegelgeraden durchsetzt
- III1 - III6 wie II1 - II6
- IV f1 und f2 werden jeweils von einer Gleitspiegelgeraden durchsetzt
- IV1 - IV6 wie I1 - I6
- V f1 wird von einer Gleitspiegelgeraden, f2 wird von keiner Gleitspiegelgeraden durchsetzt
- V1 - V6 wie II1 - II6
- VI f1 und f2 werden von keiner Gleitspiegelgeraden durchsetzt
- VI1 - VI6 wie I1 - I6

p1

Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die "Ecken" der Einheitszellen Verzweigungspunkte sind, die f1 und f2 gemeinsam angehören.

- I Die Zellen-Eckpunkte sind 3-wertig
- II Die Zellen-Eckpunkte sind 4-wertig
- III Die Zellen-Eckpunkte sind 5-wertig
- IV Die Zellen-Eckpunkte sind 6-wertig
- V Die Zellen-Eckpunkte sind m -wertig mit $m > 6$

6. Beispiele zur Herleitung der Ebenenzerlegungen

Zwei Beispiele, eins aus der Ebenengruppe pm , das andere aus der Ebenengruppe $p4$, sollen das Vorgehen bei der Herleitung der Ebenenzerlegungen illustrieren.

Zunächst wollen wir uns pm und dort dem Fall III1 zuwenden.

III Keine Fläche wird von einer Spiegelgeraden durchsetzt.

III1 $f1$ hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam.

1) $f2$ hat mit zwei Spiegelgeraden je mehrere Randpunkte gemeinsam.

Da keine der Flächen konkav sein soll, so können weder $f1$ noch $f2$ Ecken besitzen, die nicht auch zugleich Punkte einer der Spiegelgeraden sind. - Es bleibt so offensichtlich nur die Möglichkeit einer 4-Eck-4-Eck-Zerlegung. (Abb. 5).

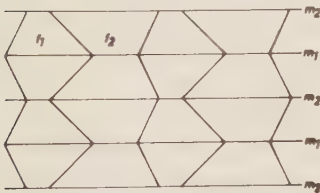


Abb. 5

Es gibt keine mit pm verträgliche Darstellung dieser Zerlegung, in der die Flächen $f1$ und $f2$ gleichschenklige Trapeze oder Parallelogramme sind, weil dabei ja 2-zählige Drehachsen auftreten. Es ist auch - wie man sich leicht überzeugt - nicht möglich, daß zwei Flächen

$f1$ - oder zwei Flächen $f2$ - eine gemeinsame Kante haben, die nicht in der Spiegelgeraden liegt, denn auch in dem Falle würden 2-zählige Drehachsen auftreten. - Selbstverständlich ist auch eine Anordnung der in Abb. 6 gezeigten Art nicht möglich, weil Gleitspiegelgeraden auftreten würden.



Abb. 6

- 2) f_2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere, mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt gemeinsam.

Auch hier dürfen die Flächen f_1 und f_2 selbstverständlich keine Eckpunkte besitzen, die nicht zugleich Punkte der Spiegelgeraden m_1 oder m_2 sind. - Hat nun eine Fläche f_2 nur einen Punkt mit einer Spiegelgeraden m_1 gemeinsam, so kann eine zweite Fläche f_2 nicht nur einen Punkt mit einer nicht zu m_1 äquivalenten Spiegelgeraden m_2 gemeinsam haben, weil sonst eine Zerlegung in mehr als zwei Flächenarten vorläge (siehe Abb. 7) - oder zusätzliche Symmetrieelemente - wie etwa in Abb. 7a - auftraten.

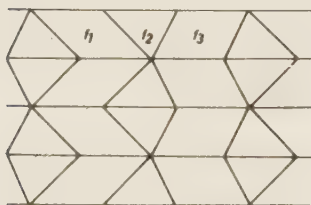


Abb. 7



Abb. 7a

Wie im vorigen Abschnitt, so können auch hier - da ja keine 2-zählige Achsen auftreten dürfen, nicht zwei Flächen f_1 oder zwei Flächen f_2 mit einer Kante aneinandergrenzen, die nicht in einer Spiegelgeraden liegt. - So bleibt lediglich die durch die folgende Darstellung repräsentierte Zerlegung.



Abb. 8

- 3) f_2 hat mit zwei Spiegelgeraden je genau einen Randpunkt gemeinsam

Dieser Fall ist, wie man unmittelbar sieht, nicht möglich, da ja beide Flächen konvex sein müssen.

- 4) f_2 hat mit einer Spiegelgeraden mehrere Randpunkte, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam.

f_2 kann - da ja f_1 nicht konkav werden darf - nur ein Dreieck sein. - Es ergibt sich die Darstellung der Abb. 9.

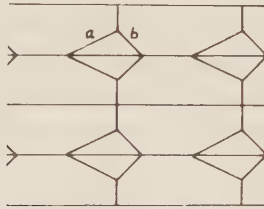


Abb. 9

Die Schenkel a und b der Fläche f_2 können hier nicht gleich lang sein, weil ja keine 2-zählige Achse vorliegen soll. Da ja auch keine Gleitspiegelgerade - und selbstverständlich keine dritte Flächenart - auftreten soll, so kann auch keine Fläche f_2 einen Punkt - oder mehrere Punkte - mit einer der Spiegelgeraden m_2 gemeinsam haben, so daß die gefundene Zerlegung die einzig mögliche ist.

- 5) f_2 hat mit einer Spiegelgeraden genau einen Randpunkt, mit keiner weiteren Spiegelgeraden einen weiteren Randpunkt gemeinsam.

Dieser Fall führt - da ja f_1 nicht konkav werden darf - zu keiner Zerlegung.

6) f_2 hat mit keiner Spiegelgeraden einen Randpunkt gemeinsam.

Auch in diesem Fall muß f_1 notwendigerweise konkav werden, so daß keine Zerlegung der von uns betrachteten Art resultieren kann.

Damit ist der Fall III¹ erschöpfend behandelt.

In einem weiteren Beispiel wollen wir p_4 - und dort den Fall I - betrachten.

I Die beiden 4-zähligen Achsen durchstechen Flächen f_1 .

I¹ Die 2-zählige Achse durchsticht f_2 .

Es sei zunächst das Motiv von f_1 ein 4-Eck - und demzufolge im hier zu behandelnden Fall ein Quadrat. - Haben diese Quadrate keinen Punkt gemeinsam, so folgt - da die 2-zählige Achse aus einer Fläche ausstoßen soll und keine Fläche konkav werden darf - mit unserer Grundvoraussetzung, daß zwei topologisch verschiedene Flächenarten vorliegen sollen, die Darstellung der Abb. 10.

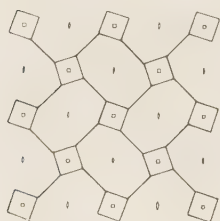


Abb. 10

Verdrehung der Quadrate gegeneinander - wobei man aber darauf zu achten hat, daß nicht mehr als zwei Arten konvexer Flächen entstehen - führt lediglich zu anderen Darstellungen derselben Zerlegung. - Selbstverständlich müssen dabei die Forderungen des Symmetriegerüsts und der Fallvoraussetzungen erfüllt bleiben, so daß also etwa eine

Anordnung der in Abb. 11 illustrierten Art hier nicht möglich

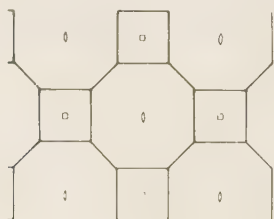


Abb. 11

ist, weil ja dabei die 2-zählige Achse zu einer 4-zähligen würde und auf den je zwei 8-Ecken gemeinsamen Kanten neue 2-zählige Achsen entstünden. - Hat jedes der von einer 4-zähligen Achse durchstochenen Quadrate mit vier weiteren Quadraten je einen Punkt gemeinsam, so resultiert

die durch die Darstellung der Abb. 12 wiedergegebene Zerlegung.

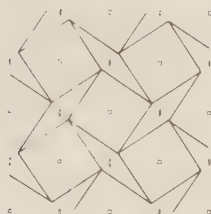


Abb. 12

Selbstverständlich kann keines der betrachteten Quadrate mit vier weiteren Quadraten je mehrere Punkte gemeinsam haben, noch kann es mit mehr als vier Quadraten überhaupt Punkte gemeinsam haben, so daß sich mit einem Quadrat als Motiv von f_1 keine weiteren Zerlegungen ergeben.

Ist das Motiv von f_1 ein 8-Eck, so kann nach unseren früheren Untersuchungen nur ein 3-Eck, 4-Eck oder 5-Eck als Motiv von f_2 vorliegen. - Da im hier betrachteten Falle f_2 von einer 2-zähligen Achse durchstoßen wird, so bleibt als Motiv für diese Fläche lediglich ein 4-Eck. Damit ist aber im Symmetrierüst von p_4 - wie unmittelbar einsichtig - lediglich die durch die folgende Darstellung (siehe Abb. 13) repräsentierte Zerlegung möglich.

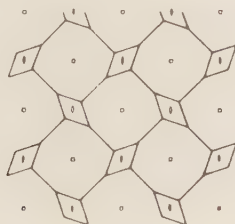


Abb. 13

Da auch dann, wenn das Motiv von f_1 ein m -Eck mit $m \geq 12$ ist, das Motiv von f_2 ein 4-Eck sein muß, so folgt - da ja weder f_1 noch f_2 konkav werden dürfen - unmittelbar die Unmöglichkeit weiterer Zerlegungen.

I2 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 2-wertigen Punkt.

1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 .

Dieser Fall ist nicht möglich; denn da ja alle Flächen f_1 untereinander topologisch gleichwertig sein sollen, dabei von 4-zähligen Drehachsen durchstoßen werden, so folgt für die von 2-zähligen Achsen durchstoßenen, je zwei Flächen f_1 trennenden Kanten die in Abb. 14 skizzierte Anordnung.



Abb. 14

Mit dieser Anordnung sind nun natürlich keine konvexen m -Ecke mit $m \geq 4$ als Motive für f_1 möglich.

2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2 .

Es sei wiederum zunächst das Motiv von f_1 ein 4-Eck - und damit im vorliegenden Falle also ein Quadrat. - Auch hier müssen die von den 2-zähligen Achsen durchstoßenen Kanten in der in Abb. 14 skizzierten Anordnung vorliegen. Haben die Quadrate keinen Punkt gemeinsam, so folgt als einzige Zerlegung die durch die Darstellung der Abb. 15 repräsentier-

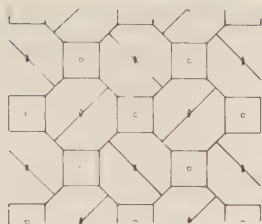


Abb. 15

Andere Orientierung der Quadrate führt lediglich zu weiteren Darstellungen derselben Zerlegung - wie es etwa in Abb. 15a dargestellt ist.

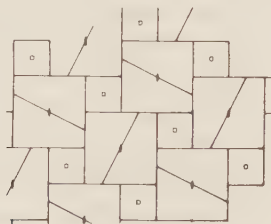


Abb. 15a

Hat jedes Quadrat mit vier weiteren je einen Punkt gemeinsam, so folgt ersichtlich als einzige Zerlegung die zur Darstellung der Abb. 16 gehörende.

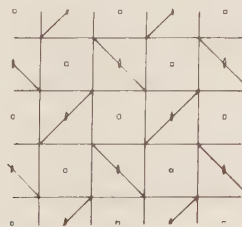


Abb. 16

Selbstverständlich ist es nicht möglich, daß ein Quadrat Punkte mit mehr als vier weiteren Quadraten oder mit vier weiteren Quadraten mehr als je einen Punkt gemeinsam hat.

Nun sei das Motiv der Fläche f_1 ein 8-Eck. - Auch hier müssen die von 2-zähligen Achsen durchstoßenen Kanten wie in den obigen Abbildungen angeordnet sein. An Hand von Abb. 15 erkennt man unmittelbar, daß keine Zerlegung vorliegen kann, in der die 8-Ecke keinen Punkt gemeinsam haben, an Hand der Abb. 16, daß auch keine Zerlegung möglich ist, in der jedes 8-Eck mit vier weiteren 8-Ecken je genau einen Punkt gemeinsam hat, weil in beiden Fällen f_2 notwendigerweise konkav werden müßte. - Für den Fall, daß ein 8-Eck mit vier weiteren 8-Ecken je mehrere Punkte gemeinsam hat, ergibt sich als einzige Zerlegung die durch die Darstellung der Abb. 17 repräsentierte.

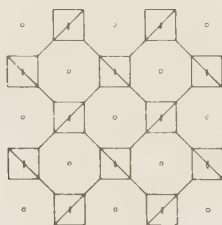


Abb. 17

Aus unseren Überlegungen für den Fall, daß das Motiv von f_1 ein 8-Eck ist, geht nun ohne weiteres hervor - siehe Abb. 15, 16, 17 -, daß als Motiv für diese Fläche kein m -Eck mit $m \geq 12$ möglich ist, da damit notwendigerweise die Flächen einer oder beider Arten konkav würden.

- 3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2 .

Dieser Fall ist, da die 2-zählige Achse ja einen 2-wertigen Punkt durchstoßen soll, selbstverständlich nicht möglich.

13 Die 2-zählige Achse durchsticht einen 4-wertigen Punkt.

1) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_1 .

Da alle Flächen f_1 untereinander topologisch gleichwertig sein sollen und von 4-zähligen Achsen durchstoßen werden, so ist die Anordnung der von den 2-zähligen Achsen durchstoßenen Kanten, die hier ja nur Flächen f_1 trennen, die in Abb. 18 skizzierte.



Abb. 18

Mit dieser Anordnung sind nun natürlich keine konvexen m -Ecke mit $m \geq 4$ als Motive für f_1 möglich.

2) Die 2-zählige Achse durchsticht nur den Rand von f_2 .

Es sei das Motiv von f_1 ein 4-Eck, also hier ein Quadrat. Haben die Quadrate keinen Punkt miteinander gemeinsam, so ergibt sich zunächst die Darstellung der Abb. 19.

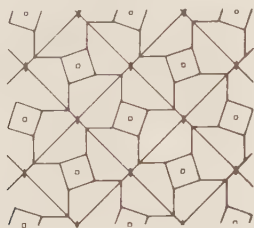


Abb. 19

Man erkennt unmittelbar, daß zwar andere Darstellungen, aber keine weiteren Zerlegungen unter den hier getroffenen Voraussetzungen möglich sind. - Hat jedes Quadrat mit vier weiteren Quadraten je einen Punkt gemeinsam, so folgt - und wiederum ersichtlich als einzige - die zur Darstellung der Abb. 20 gehörende Zerlegung.

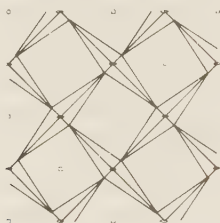


Abb. 20

Selbstverständlich ist es nicht möglich, daß ein Quadrat Punkte mit mehr als vier weiteren Quadraten oder mit vier weiteren Quadraten je mehr als einen Punkt gemeinsam hat. - Nun sei das Motiv der Fläche f_1 ein 8-Eck. Auch hier müssen die von 2-zähligen Achsen durchstoßenen Kanten wie in den obigen Abbildungen angeordnet sein. An Hand von Abb. 19 erkennt man unmittelbar, daß keine Zerlegung vorliegen kann, in der die 8-Ecke keinen Punkt gemeinsam haben, an Hand von Abb. 20, daß auch keine Zerlegung möglich ist, in der jedes 8-Eck mit vier weiteren 8-Ecken je genau einen Punkt gemeinsam hat, weil in beiden Fällen f_2 notwendigerweise konkav werden müßte. Für den Fall, daß ein 8-Eck mit vier weiteren je mehrere Punkte gemeinsam hat, ergibt sich als einzige Zerlegung die durch die Darstellung der Abb. 21 repräsentierte.

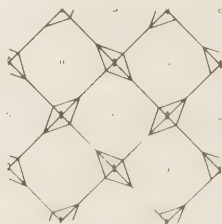


Abb. 21

Selbstverständlich kann keines der 8-Ecke mit mehr als vier weiteren 8-Ecken Punkte gemeinsam haben. -

Aus den Überlegungen für den Fall, daß das Motiv von f_1 ein 8-Eck ist, geht unmittelbar hervor - siehe Abb. 19, 20, 21 -, daß als Motiv für diese Fläche kein m -Eck mit $m \geq 12$ möglich ist, weil damit notwendigerweise die Flächen einer oder beider Arten konkav würden.

3) Die 2-zählige Achse durchsticht den Rand von f_1 und von f_2 . Dieser Fall ist nicht möglich, weil ja alle von 4-zähligen Achsen durchstoßenen Flächen einander topologisch äquivalent sein sollen.

I4 Die 2-zählige Achse durchsticht einen m -wertigen Punkt mit $m > 4$.

Wendet man die Überlegungen des Falles I3 hier an, so folgt unmittelbar, daß keine weiteren Zerlegungen resultieren können. -

Damit ist der Fall I abgeschlossen.

Nachdem die Untersuchungen für sämtliche Fälle nach den oben gegebenen Beispielen durchgeführt sind, muß noch geprüft werden, welche der Darstellungen zur gleichen Ebenenzerlegung gehören. Es ist dabei nach unserer Definition festzustellen, welche Darstellungen durch eine umgebungstreue Transformation ineinander überführbar sind. - So gehören z. B. die beiden Darstellungen

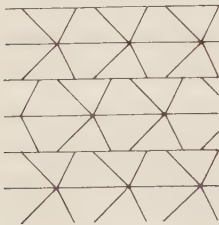


Abb. 22

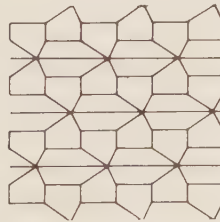


Abb. 23

selbstverständlich zur gleichen Zerlegung. - Bei jeder mit Hilfe der Gruppen p_6 , p_4 , p_3 und p_2 gefundenen Darstellung ist außerdem zu untersuchen, ob im jeweils betrachteten Fall (siehe Kap. IV5) äquivalente Darstellungen in den Gruppen auftreten, deren Bezeichnungssymbole aus den obigen durch Zufügen der Symbole für Spiegel- bzw. Gleitspiegelgeraden hervorgehen. - Diese Untersuchungen können hier natürlich nicht explizit wiedergegeben werden.

7) Tabelle der heterogenen Ebenenzerlegungen mit zwei topologisch verschiedenen Flächenarten

Die im Symmetriegerüst einer Ebenengruppe auftretenden verschiedenen Darstellungen derselben Zerlegung werden nicht gesondert aufgeführt. Sind Darstellungen derselben Zerlegung mittels der Symmetriegerüste verschiedener Flächengruppen möglich, so wird das in der folgenden Tabelle **angemerkt**.

In dieser Tabelle werden die Zerlegungen durch ein topologisches Symbol charakterisiert. Betrachtet man etwa ein m -Eck der Zerlegung, so werden zunächst die Wertigkeiten der Ecken dieses m -Ecks angegeben, dazu zwischen je zwei Wertigkeitsangaben in runden Klammern die Eckenzahl desjenigen Polygons, das mit dem herausgegriffenen m -Eck die Kante gemeinsam hat, die zwischen den beiden Punkten mit den entsprechenden Wertigkeitsangaben liegt. - So bedeutet etwa das Symbol $4(3)4(4)3(4)$, daß es sich bei dem betrachteten Polygon um ein Dreieck handelt, das zwei 4-wertige Eckpunkte und einen 3-wertigen Eckpunkt besitzt.⁺ Die Kante zwischen den beiden 4-wertigen Eckpunkten trennt das betrachtete Dreieck von einem weiteren Dreieck derselben Art, die Kante zwischen dem zweiten 4-wertigen und dem 3-wertigen Eckpunkt trennt das Dreieck von einem 4-Eck, ebenso die Kante zwischen dem 3-wertigen und dem ersten 4-wertigen Eckpunkt (das Symbol ist zyklisch zu lesen). - Die Zerlegung wird nun durch Angabe der entsprechenden Symbole für beide Flächenarten charakterisiert. - Liegen topologisch verschiedene Eckpunkte mit gleicher Wertigkeit vor, so werden sie durch Indizes unterschieden. Ist eine Zerlegung mit mehreren Ebenengruppen verträglich, so werden in der Tabelle die Symbole für die dort zuerst genannte Gruppe angegeben. Die Symbole der Darstellungen in den anderen Gruppen unterscheiden sich davon höchstens dadurch, daß eventuell gleichwertige Punkte, die in der zuerst aufgeführten Gruppe auch topologisch als gleich zu betrachten sind, in den anderen

⁺ Im folgenden werden wir oft durch eine Potenzangabe ausdrücken, wie oft ein Zeichen wiederholt werden soll; so steht etwa $(3(6))^2$ für $3(6)3(6)3(6)$.

Gruppen als durch die dort vorliegende Symmetrie ungleich durch Indizes zu unterscheiden sind - oder in einigen Fällen auch umgekehrt.

Als Beispiel mögen die beiden ersichtlich topologisch äquivalenten Darstellungen der Abb. 24 und der Abb. 25 dienen.

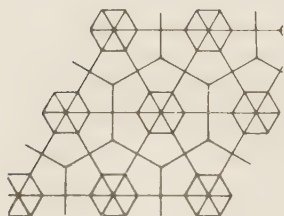


Abb. 24

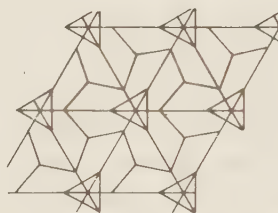


Abb. 25

Im ersten Falle lautet das Symbol

$6(3)4_1(5)4_1(3) - 4_1(3)4_1(5)4_2(5)3(5)4_2(5)$, im zweiten Falle

$6(3)4_1(5)4_2(3) - 4_2(3)4_1(5)4_3(5)3(5)4_3(5)$. - Als Bezeichnung für die zu beiden Darstellungen gehörende Zerlegung

dient in der Tabelle das erste Symbol, weil dort $p6mm$ vor $p31m$ aufgeführt ist.

In dieser Tabelle wird in der zweiten Spalte zur schnelleren Übersicht über die Koordinationsverhältnisse ein Kurzsymbol angegeben, das im obigen Beispiel 5^13^1 lautet. Das Symbol ist folgendermaßen zu lesen. An ein Dreieck grenzt ein 5-Eck längs einer Kante, an ein 5-Eck grenzt ein Dreieck längs einer Kante.

In der dritten Spalte wird analog dem Vorgehen von Frank und Kasper^{4,1)} die Koordinationszahl angegeben, die man erhält, wenn man die Anzahlen der an jede der beiden Flächen längs einer Kante angrenzenden Flächen addiert und durch zwei dividiert. Die Spalte trägt die Überschrift F.-K. KZ.

In der vierten Spalte werden die Ebenengruppen aufgeführt, in denen eine Zerlegung darstellbar ist - und schließlich in der fünften Spalte die Nummer, unter der man im Bildteil eine in der zuerst aufgeführten Gruppe mögliche Darstellung der Zerlegung findet.

Zerlegungssymbol

3-Eck - 3-Eck

$6_1(3_1)6_2(3_2)6_2(3_1)$	-	$6_2(3_1)6_2(3_1)6_2(3_1)$
$8(3_2)4(3_1)12(3_1)$	-	$8(3_2)6(3_2)4(3_1)$
$8(3_2)8(3_1)6(3_1)$	-	$8(3_1)8(3_2)3(3_2)$
$9(3_2)4(3_1)4(3_2)$	-	$12(3_2)9(3_1)4(3_2)$
$12_1(3_1)4_1(3_1)4_2(3_2)$	-	$12_1(3_2)12_2(3_2)4_2(3_1)$
$12_1(3_1)12_2(3_2)3(3_1)$	-	$12_2(3_2)12_2(3_1)3(3_1)$
$18(3_2)4(3_1)4(3_2)$	-	$18(3_2)6(3_2)4(3_1)$
$24(3_1)4_1(3_1)4_2(3_2)$	-	$24(3_2)6(3_2)4_2(3_1)$
$24(3_1)6(3_1)3(3_2)$	-	$24(3_1)24(3_2)3(3_2)$
$12(3_2)6(3_2)4(3_2)$	-	$12(3_1)4(3_1)6(3_1)$
$6(3_2)6(3_2)6(3_2)$	-	$6(3_1)6(3_1)6(3_1)$
$9(3_2)9(3_1)3(3_1)$	-	$9(3_1)9(3_1)9(3_1)$
$12(3_2)4(3_1)6_1(3_1)$	-	$12(3_1)4(3_2)6_2(3_2)$
$12(3_2)12(3_1)3_1(3_1)$	-	$12(3_1)12(3_2)3_2(3_2)$
$8(3_2)8(3_1)4_1(3_1)$	-	$8(3_1)8(3_2)4_2(3_2)$
$8_1(3_1)8_2(3_2)4(3_1)$	-	$8_2(3_2)8_3(3_2)4(3_1)$
$12(3_2)4(3_1)4(3_2)$	-	$12(3_2)8(3_2)4(3_1)$
$16(3_1)4_1(3_1)4_2(3_2)$	-	$16(3_2)8(3_2)4_2(3_1)$
$16(3_1)16(3_2)3(3_2)$	-	$16(3_2)8(3_2)3(3_1)$
$7(3_2)7(3_1)4(3_1)$	-	$7(3_1)7(3_1)7(3_2)$
$8(3_2)8(3_2)4(3_2)$	-	$8(3_1)8(3_1)4(3_1)$
$8_1(3_2)8_2(3_1)4(3_2)$	-	$8_1(3_1)4(3_2)8_2(3_1)$
$6_1(3_2)6_2(3_1)6_2(3_2)$	-	$6_1(3_1)6_2(3_2)6_2(3_2)$
$8(3_1)4(3_1)6(3_2)$	-	$8(3_1)6(3_2)6(3_2)$
$8(3_1)8(3_2)5(3_2)$	-	$8(3_1)5(3_2)5(3_2)$
$10(3_2)4(3_1)4(3_2)$	-	$10(3_2)10(3_2)4(3_1)$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenergruppe	Nummer im Bildteil
$3_2^1 3_1^3$	3	$p6mm, p\bar{3}1m$	1
$3_2^1 3_1^1$	3	$p6mm$	2
$3_2^1 3_1^1$	3	$p6mm, p\bar{3}1m$	3
$3_2^2 3_1^1$	3	$p6mm$	4
$3_2^1 3_1^1$	3	$p6mm$	5
$3_2^1 3_1^2$	3	$p6mm$	6
$3_2^2 3_1^1$	3	$p6mm$	7
$3_2^1 3_1^1$	3	$p6mm$	8
$3_2^1 3_1^2$	3	$p6mm$	9
$3_2^3 3_1^3$	3	$p6$	10
$3_2^3 3_1^3$	3	$p\bar{3}m1, cm, pg, p1$	11
$3_2^1 3_1^3$	3	$p\bar{3}m1$	12
$3_2^1 3_1^1$	3	$p\bar{3}m1$	13
$3_2^1 3_1^1$	3	$p\bar{3}m1$	14
$3_2^1 3_1^1$	3	$p4mm, p2mm$	15
$3_2^1 3_1^1$	3	$p4mm$	16
$3_2^2 3_1^1$	3	$p4mm$	17
$3_2^1 3_1^1$	3	$p4mm$	18
$3_2^2 3_1^1$	3	$p4mm$	19
$3_2^1 3_1^2$	3	$p4gm$	20
$3_2^3 3_1^3$	3	$p4gm$	21
$3_2^2 3_1^2$	3	$p4gm$	22
$3_2^2 3_1^1$	3	$c2mm$	23
$3_2^1 3_1^1$	3	$c2mm$	24
$3_2^2 3_1^1$	3	$c2mm$	25
$3_2^2 3_1^1$	3	$c2mm$	26

Zerlegungssymbol

3-Eck - 3-Eck

$12(3_1)4_1(3_1)4_2(3_2)$	-	$12(3_2)12(3_2)4_2(3_1)$
$12(3_1)12(3_2)3(3_2)$	-	$12(3_2)12(3_2)3(3_1)$
$6_1(3_1)6_1(3_2)6_2(3_2)$	-	$6_1(3_1)6_2(3_2)6_2(3_1)$
$8(3_2)6(3_1)4(3_1)$	-	$8(3_2)8(3_1)6(3_1)$
$8(3_1)8(3_2)4(3_2)$	-	$8(3_2)8(3_1)4(3_1)$
$6(3_1)6(3_1)6(3_2)$	-	$6(3_2)6(3_2)6(3_1)$
$6_1(3_1)6_1(3_2)6_2(3_1)$	-	$6_1(3_2)6_2(3_2)6_2(3_1)$
$8(3_1)8(3_2)4(3_1)$	-	$8(3_2)8(3_2)4(3_1)$
$6(3_1)6(3_2)6(3_2)$	-	$6(3_2)6(3_1)6(3_1)$
$8(3_2)8(3_2)4(3_1)$	-	$8(3_1)8(3_1)4(3_2)$

3-Eck - 4-Eck

$3(4)3(4)3(4)$	-	$12(4)12(4)3(3)3(4)$
$4(4)4(3)3(3)$	-	$12(4)12(4)4(3)4(4)$
$4(3)4(4)3(4)$	-	$12(4)6(4)3(3)4(4)$
$4(3)4(4)3(4)$	-	$12(4)6(4)4(3)3(4)$
$4_1(4)4_2(3)4_3(3)$	-	$12(4)6(4)4_2(3)4_1(4)$
$6_1(3)4(4)4(3)$	-	$6_2(4)6_2(4)4(3)4(4)$
$6_1(4)4(3)4(4)$	-	$6_2(4)4(3)6_1(3)4(4)$
$6(3)4_1(4)4_2(3)$	-	$12(4)4_3(4)4_2(3)4_1(4)$
$6_1(3)6_2(4)4(3)$	-	$6_3(4)4(3)6_2(3)4(4)$
$8(3)6_1(3)3(4)$	-	$8(4)6_2(4)8(3)3(3)$
$9(4)4_1(3)4_2(3)$	-	$9(3)4_1(4)6(4)4_1(3)$
$9(3)9(4)3(4)$	-	$9(3)3(4)6(4)3(3)$
$12(4)4(3)4(4)$	-	$12(3)4(4)3(4)4(3)$
$12(3)4_1(4)4_2(3)$	-	$6(4)4_2(3)4_1(4)4_3(4)$

Koordinations- kurzsymbolsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$3_2^1 3_1^1$	3	c2mm	27
$3_2^2 3_1^1$	3	c2mm	28
$3_2^2 3_1^2$	3	p2mm, p2mg, p2, cm	29
$3_2^1 3_1^2$	3	p2mm	30
$3_2^2 3_1^2$	3	p2mm, p2mg, p2	31
$3_2^1 3_1^1$	3	p2mg, p2gg, p2	32
$3_2^1 3_1^1$	3	p2mg	33
$3_2^1 3_1^1$	3	p2mg	34
$3_2^2 3_1^2$	3	p2gg	35
$3_2^2 3_1^2$	3	cm	36
$4^3 3^1$	3,5	p6mm, p6	37
$4^1 3^1$	3,5	p6mm, p6	38
$4^2 3^1$	3,5	p6mm	39
$4^2 3^1$	3,5	p6mm	40
$4^1 3^1$	3,5	p6mm	41
$4^1 3^1$	3,5	p6mm, p6, p3m1	42
$4^2 3^2$	3,5	p6mm, p6	43
$4^1 3^1$	3,5	p6mm	44
$4^1 3^2$	3,5	p6mm	45
$4^1 3^2$	3,5	p6mm	46
$4^1 3^2$	3,5	p6mm	47
$4^2 3^2$	3,5	p6mm, p6	48
$4^2 3^2$	3,5	p6mm, p6	49
$4^1 3^1$	3,5	p6mm	50

Zerlegungssymbol

5-Eck - 4-Eck

12(3)6(4)4(3)	- 6(3)4(4)3(4)4(3)
12(3)8(4)3 ₁ (3)	- 8(3)3 ₁ (3)8(4)3 ₂ (4)
12(3)9(4)3(3)	- 9(3)3(3)9(3)3(3)
18(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	- 18(3)4 ₂ (4)3(4)4 ₂ (3)
18(3)6(3)3(4)	- 18(3)3(3)18(3)3(3)
18(3)18(4)3 ₁ (4)	- 18(3)3 ₁ (4)3 ₂ (4)3 ₁ (3)
4(4)4(4)4(4)	- 6(4)4(3)4(4)4(4)
5(4)5(3)3(3)	- 6(4)5(3)5(4)5(4)
6(3)5(4)5(3)	- 5(3)5(4)5(4)3(4)
12(4)3(4)6(4)	- 12(3)6(3)3(4)3(3)
5(4)5(4)5(4)	- 5(3)5(3)5(4)3(4)
6 ₁ (3)6 ₂ (4)4(3)	- 6 ₂ (3)4(4)6 ₂ (4)3(4)
7(4)7(3)3 ₁ (3)	- 7(3)7(3)7(4)3(4)
9(3)6(3)4(4)	- 9(3)4(4)3(4)4(3)
12(3)6(3)3 ₁ (4)	- 12(3)3 ₁ (3)12(4)3 ₂ (4)
4(3)4(4)3(4)	- 8 ₁ (4)8 ₂ (4)3(3)4(4)
4 ₁ (4)4 ₁ (3)4 ₂ (3)	- 8(4)8(4)4 ₁ (3)4 ₁ (4)
6(4)6(3)4(3)	- 6(3)6(3)6(3)6(3)
8(4)4 ₁ (3)4 ₁ (4)	- 8(3)4 ₁ (4)4 ₂ (4)4 ₁ (3)
8 ₁ (3)4 ₁ (4)4 ₂ (3)	- 8 ₂ (4)4 ₁ (3)4 ₂ (4)4 ₃ (4)
8(3)6(4)4 ₁ (3)	- 6(3)4 ₁ (4)4 ₂ (4)4 ₁ (3)
8 ₁ (3)8 ₂ (4)3(3)	- 8 ₂ (4)4(4)8 ₂ (3)3(3)
12(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	- 12(3)4 ₂ (4)4 ₃ (4)4 ₂ (3)
12(3)8(3)3(4)	- 12(3)3(3)12(3)3(3)
12(3)12(4)3(4)	- 12(3)3(4)4(4)3(3)
5(3)5(4)5(4)	- 5(3)5(3)5(3)5(3)

Koordinations- kurzsymbols	F.-K. KZ	Ebenen- gruppe	Nummer im Bildteil
$4^1 3^2$	3,5	p6mm	51
$4^1 3^2$	3,5	p6mm	52
$4^1 3^4$	3,5	p6mm	53
$4^1 3^2$	3,5	p6mm	54
$4^1 3^4$	3,5	p6mm	55
$4^2 3^2$	3,5	p6mm, p6	56
$4^3 3^1$	3,5	p6	57
$4^1 3^1$	3,5	p6	58
$4^1 3^1$	3,5	p6	59
$4^3 3^3$	3,5	p6	60
$4^3 3^2$	3,5	p31m	61
$4^1 3^1$	3,5	p31m	62
$4^1 3^2$	3,5	p31m	63
$4^1 3^2$	3,5	p3m1	64
$4^1 3^2$	3,5	p3m1	65
$4^2 3^1$	3,5	p4mm	66
$4^1 3^1$	3,5	p4mm, p4, c2mm	67
$4^1 3^4$	3,5	p4mm, p4gm, p2mm	68
$4^2 3^2$	3,5	p4mm, p4gm, p4	69
$4^1 3^1$	3,5	p4mm	70
$4^1 3^2$	3,5	p4mm	71
$4^1 3^2$	3,5	p4mm	72
$4^1 3^2$	3,5	p4mm	73
$4^1 3^4$	3,5	p4mm	74
$4^2 3^2$	3,5	p4mm, p4gm, p4	75
$4^2 3^4$	3,5	p4gm, p2gg	76

Zerlegungssymbol

3-Eck - 4-Eck

8(4)6(3)3(4)	-	3(3)6(3)8(3)3(3)
8(4)8(4)3(4)	-	8(3)8(3)3(4)3(3)
5(4)5(3)4 ₁ (3)	-	5(4)5(3)5(4)4(4)
4(3)4(4)3(4)	-	3(4)8(4)3(3)4(4)
5(4)4 ₁ (3)4 ₁ (4)	-	5(4)5(3)4 ₁ (4)4 ₂ (4)
5(3)5(4)4(4)	-	5(4)5(4)5(3)4(3)
5(3)5(3)5(4)	-	5(4)5(3)5(4)5(3)
5(3)5(3)5(4)	-	5(3)5(4)4(4)4(4)
6(4)4(3)4(4)	-	6(4)4(3)6(4)4(3)
6(4)4 ₁ (3)4 ₁ (4)	-	6(4)4 ₂ (4)4 ₂ (4)4 ₁ (3)
6(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	-	6(4)6(4)4 ₃ (4)4 ₂ (3)
6(4)4(4)4(4)	-	6(4)6(3)4(3)4(3)
6(3)4(3)5(4)	-	6(3)5(4)5(4)5(3)
6(3)5(3)5(4)	-	6(3)5(3)6(3)5(3)
6(3)6(4)3(4)	-	6(4)6(4)4(4)3(3)
6(3)6(4)4(3)	-	6(4)6(3)4(4)4(3)
6(3)6(4)4(4)	-	6(3)4(4)4(4)4(3)
6(3)6(4)4 ₁ (3)	-	6(4)4 ₂ (4)4 ₃ (4)4 ₁ (3)
8(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	-	8(3)4 ₂ (4)8(3)4 ₂ (4)
8(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	-	8(3)4 ₂ (4)4 ₃ (4)4 ₃ (4)
8(3)4 ₁ (4)4 ₂ (4)	-	8(3)4 ₂ (3)4 ₁ (4)4 ₃ (4)
8(3)8(4)3(4)	-	8(3)3(4)8(3)3(4)
8(3)8(4)3(4)	-	8(3)3(4)4(4)4(4)
10(3)10(4)3(3)	-	10(3)3(3)10(3)3(3)
6(4)4(3)4(4)	-	6(4)6(3)4(4)4(3)
6(4)4 ₁ (3)4 ₁ (4)	-	6(3)4 ₁ (4)4 ₂ (4)4 ₃ (4)

Koordinations- kurzsymbols	F.-K. KZ	Ibenenengruppe	Nummer im Bildteil
$4^2 3^4$	3,5	j4gm	77
$4^3 3^3$	3,5	j4gm, p4	78
$4^1 3^1$	3,5	j4	79
$4^2 3^1$	3,5	c2mm	80
$4^2 3^1$	3,5	c2mm	81
$4^2 3^2$	3,5	c2mm, p2gg, p2	82
$4^1 3^2$	3,5	c2mm, p2mg, p2	83
$4^1 3^1$	3,5	c2mm, p2mg, p2	84
$4^2 3^2$	3,5	c2mm, cm	85
$4^2 3^1$	3,5	c2mm	86
$4^1 3^1$	3,5	c2mm	87
$4^3 3^3$	3,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	88
$4^1 3^2$	3,5	c2mm	89
$4^1 3^4$	3,5	c2mm	90
$4^2 3^1$	3,5	c2mm	91
$4^1 3^2$	3,5	c2mm	92
$4^2 3^2$	3,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	93
$4^1 3^1$	3,5	c2mm	94
$4^1 3^2$	3,5	c2mm	95
$4^1 3^1$	3,5	c2mm	96
$4^2 3^2$	3,5	c2mm	97
$4^2 3^2$	3,5	c2mm, cm	98
$4^2 3^1$	3,5	c2mm	99
$4^1 3^4$	3,5	c2mm	100
$4^2 3^2$	3,5	p2mm, p2mg, p2, cm	101
$4^2 3^1$	3,5	p2mm	102

Zerlegungssymbol

3-Eck - 4-Eck

6(3)6(4)4(4)	-	6(3)4(3)6(3)4(3)
8(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	-	8(4)8(3)4 ₂ (4)4 ₂ (3)
8(3)4 ₁ (3)4 ₂ (4)	-	8(3)4 ₂ (4)4 ₃ (4)4 ₄ (4)
8(3)8(4)3(4)	-	8(4)8(3)3(4)3(3)
8(3)8(4)3(4)	-	8(3)3(4)4 ₁ (4)4 ₂ (4)
5 ₁ (4)5 ₂ (3)5 ₂ (3)	-	5 ₁ (4)5 ₁ (4)5 ₁ (3)5 ₂ (3)
6(4)4 ₁ (4)4 ₂ (3)	-	6(4)6(4)4 ₂ (3)4 ₁ (3)
6(3)6(4)4(3)	-	6(4)4(3)6(4)4(3)
6(3)6(4)4 ₁ (3)	-	6(4)4 ₂ (4)4 ₂ (4)4 ₁ (3)
7(3)7(3)3(4)	-	7(4)7(4)7(3)3(3)
5(4)5(4)4(4)	-	5(4)5(3)5(3)4(3)
7(4)7(3)3(4)	-	7(3)7(3)7(3)3(3)

3-Eck - 5-Eck

3(5)3(5)3(5)	-	6(4)4(4)3(3)3(4)4(4)
4 ₁ (5)4 ₁ (3)3(3)	-	6(4)4 ₂ (4)4 ₁ (3)4 ₁ (4)4 ₂ (4)
6(3)4(5)3(3)	-	12(5)12(5)4(3)3(3)4(5)
6(3)4 ₁ (5)4 ₁ (3)	-	4 ₂ (5)4 ₁ (3)4 ₁ (5)4 ₂ (5)3(5)
6 ₁ (3)4 ₁ (5)4 ₂ (3)	-	6 ₂ (5)4 ₂ (3)4 ₁ (5)4 ₁ (3)4 ₂ (5)
12(3)4(5)3(3)	-	6(5)6(5)4(3)3(3)4(5)
12(3)4 ₁ (5)4 ₂ (3)	-	4 ₁ (3)4 ₂ (5)4 ₂ (3)4 ₁ (5)3(5)
6 ₁ (5)4(5)3(5)	-	6 ₁ (3)3(5)6 ₂ (5)3(3)4(3)
12(5)3 ₁ (5)4(5)	-	12(3)4(3)3 ₁ (5)3 ₂ (5)3 ₁ (3)
4(5)4(5)4(5)	-	4(3)4(5)3(5)4(5)3(5)
5(5)5(3)3 ₁ (3)	-	5(3)5(5)3 ₂ (5)5(5)3 ₂ (5)
3 ₁ (5)3 ₁ (5)3 ₁ (5)	-	6(5)3 ₁ (3)3 ₁ (5)6(5)3 ₂ (5)

Koordinations- kurzsymb ^{ol}	F.-K. KZ	Ebenen ^{gruppe}	Nummer im Bildteil
$4^2 3^4$	3,5	$p2m_1$, $p2mg$, $p2$, pm	103
$4^1 3^2$	3,5	$p2m_1$	104
$4^1 3^1$	3,5	$p2m_1$	105
$4^2 3^2$	3,5	$p2m_1$, $p2mg$, $p2$	106
$4^2 3^1$	3,5	$p2m_1$	107
$4^1 3^2$	3,5	$p2m_3$	108
$4^2 3^2$	3,5	$p2m_3$	109
$4^1 3^2$	3,5	$p2m_3$	110
$4^1 3^1$	3,5	$p2m_3$	111
$4^1 3^2$	3,5	$p2m_3$	112
$4^3 3^3$	3,5	$p2g_3$	113
$4^2 3^4$	3,5	cm	114
$5^3 3^1$	4	$p6mn$, $p6$, $p31m$	115
$5^1 3^1$	4	$p6mn$, $p6$, $p31m$	116
$5^1 3^2$	4	$p6mm$	117
$5^1 3^1$	4	$p6mm$, $p6$, $p31m$	118
$5^1 3^2$	4	$p6mm$	119
$5^1 3^2$	4	$p6mm$	120
$5^1 3^2$	4	$p6mm$	121
$5^3 3^3$	4	$p6$	122
$5^3 3^3$	4	$p6$	123
$5^3 3^1$	4	$p31m$, $p3$	124
$5^1 3^1$	4	$p31m$, $p3$	125
$5^3 3^1$	4	$p3m1$, $p3$	126

Zerlegungssymbol

3-Eck - 5-Eck

$4(5)4(3)3_1(3)$	-	$6(5)4(3)4(5)6(5)3_2(5)$
$12(3)4(5)3_1(5)$	-	$12(5)4(3)3_1(5)3_2(5)3_1(3)$
$6_1(5)6_2(5)3_1(5)$	-	$6_2(3)6_1(3)3_1(5)3_2(5)3_1(3)$
$4_1(3)4_2(4)4_2(3)$	-	$4_2(3)4_2(5)4_3(5)4_4(5)4_3(5)$
$8_1(3)4(5)3(3)$	-	$8_2(5)8_2(5)4(3)3(3)4(5)$
$8(3)4_1(5)4_2(3)$	-	$4_1(3)4_2(5)4_2(3)4_1(5)4_3(5)$
$4_1(3)4_1(5)3(5)$	-	$4_2(5)4_3(5)4_2(5)4_1(3)3(5)$
$8(3)4_1(5)3(5)$	-	$8(3)3(5)4_2(5)3(3)4_1(5)$
$8(5)4(3)3(5)$	-	$8(3)3(3)8(3)4(5)4(3)$
$8(5)3(5)4_1(5)$	-	$8(3)4_1(3)3(5)4_2(5)3(3)$
$4_1(3)4_1(5)3(5)$	-	$4_1(5)4_2(5)4_2(5)4_3(5)3(3)$
$4_1(3)4_1(5)3(5)$	-	$4_1(3)3(5)4_2(5)4_2(5)4_3(5)$
$4_1(3)4_1(5)4_2(5)$	-	$4_1(5)4_1(3)4_2(5)4_2(5)4_2(3)$
$4_1(3)4_2(5)4_3(3)$	-	$4_2(5)4_4(5)4_4(5)4_5(5)4_3(3)$
$4_1(3)4_2(5)4_3(5)$	-	$4_1(3)4_3(3)4_2(5)4_4(5)4_5(5)$
$5(3)4_1(3)4_2(5)$	-	$5(5)5(5)5(3)4_2(5)4_2(3)$
$5(3)5(5)3(5)$	-	$5(5)5(5)5(3)3(5)3(3)$
$5(3)5(5)4_1(3)$	-	$5(3)4_1(5)4_2(5)4_2(5)4_1(3)$
$6(3)4_1(5)4_2(5)$	-	$6(3)4_2(3)4_1(5)4_1(3)4_2(3)$
$6(3)6(5)3(3)$	-	$6(5)4(5)4(5)6(3)3(3)$
$8(3)4_1(5)3(5)$	-	$8(3)3(5)3(3)4_1(5)4_2(5)$
$8(5)4(5)3(3)$	-	$8(5)8(3)4(3)3(3)4(3)$
$4_1(3)4_1(5)3(5)$	-	$4_1(5)4_2(5)4_3(5)4_4(5)3(3)$
$6(3)4_1(3)4_2(5)$	-	$6(3)4_2(5)4_3(5)4_3(5)4_4(3)$
$6(3)6(5)3(5)$	-	$6(3)3(5)4(5)4(5)3(3)$
$4_1(5)4_1(5)4_2(5)$	-	$4_1(3)4_1(3)4_2(5)4_2(5)4_2(3)$

Koordinations- kurzsymbols	F.-K. KZ	Fbenengruppe	Nummer im Bildteil
$5^1 3^1$	4	$p\bar{3}m1, p\bar{3}$	127
$5^2 3^2$	4	$p\bar{3}1m$	128
$5^3 3^3$	4	$p\bar{3}$	129
$5^1 3^1$	4	$p4mm, p4gm, p4, p2mm$	130
$5^1 3^2$	4	$p4mm$	131
$5^1 3^2$	4	$p4mm$	132
$5^2 3^1$	4	$p4gm, p4$	133
$5^2 3^2$	4	$p4gm$	134
$5^2 3^4$	4	$p4gm$	135
$5^3 3^3$	4	$p4$	136
$5^2 3^1$	4	$c2mm$	137
$5^2 3^1$	4	$c2mm$	138
$5^2 3^2$	4	$c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm$	139
$5^1 3^1$	4	$c2mm$	140
$5^2 3^2$	4	$c2mm, p2mm, p2mg, p2$	141
$5^1 3^2$	4	$c2mm$	142
$5^2 3^2$	4	$c2mm, p2gg, p2$	143
$5^1 3^2$	4	$c2mm$	144
$5^2 3^4$	4	$c2mm$	145
$5^1 3^2$	4	$c2mm$	146
$5^2 3^2$	4	$c2mm$	147
$5^2 3^4$	4	$c2mm$	148
$5^2 3^1$	4	$p2mm$	149
$5^1 3^2$	4	$p2mm$	150
$5^2 3^2$	4	$p2mm, p2mg, p2, pm$	151
$5^3 3^3$	4	$p2mg, p2gg, p2, pg$	152

Zerlegungssymbol

3-Eck - 5-Eck

$5(3)5(3)5(5)$	-	$5(3)5(5)3(5)3(5)3(5)$
$6(3)4(5)3(5)$	-	$6(5)6(3)3(5)3(3)4(5)$
$4_1(3)4_1(5)4_2(5)$	-	$4_1(3)4_2(5)4_2(5)4_1(3)4_2(5)$
$5(3)5(5)3(5)$	-	$5(5)5(3)3(5)5(3)3(5)$
$5(5)5(5)3(5)$	-	$5(5)5(3)5(3)3(5)3(3)$
$6(5)3(5)4(5)$	-	$6(5)6(3)4(3)3(5)3(3)$
$5(5)5(5)3(5)$	-	$5(3)5(5)3(3)5(3)3(5)$
$6(3)4(5)3(5)$	-	$6(5)3(3)6(5)3(3)4(5)$
$5(5)5(5)3(5)$	-	$5(3)5(5)3(3)5(5)3(3)$

3-Eck - 6-Eck

$(3(6))^3$	-	$(6(6)3(3)3(6))^2$
$4(6)4(3)3(3)$	-	$(6(6)4(3)4(6))^2$
$4(3)4(6)3_1(6)$	-	$6(6)4(3)3_1(6)3_2(6)3_1(3)4(6)$
$4(3)4(6)3_1(6)$	-	$6(6)3_1(3)4(6)3_2(6)4(3)3_1(6)$
$(4(6))^3$	-	$(4(3))^6$
$4_1(3)4_2(6)4_3(3)$	-	$6(6)4_2(3)4_3(6)3(6)4_3(3)4_2(6)$
$6_1(3)4_1(6)3(3)$	-	$6_2(6)4_2(6)4_1(3)3(3)4_1(6)4_2(6)$
$6(3)4(6)4(3)$	-	$(4(3)4(6))^3$
$6(3)4(6)4(3)$	-	$(4(3)4(6)3(6))^2$
$6(6)6(3)3(3)$	-	$(6(3))^6$
$12(3)4_1(6)3_1(3)$	-	$4_1(3)3_1(3)4_1(6)4_2(6)3_2(6)4_2(6)$
$12(3)6(6)3(3)$	-	$(6(3)3(3))^3$
$(3_1(6))^3$	-	$6(6)3_2(6)3_1(3)3_1(6)3_2(6)3_2(6)$
$4(6)4(3)3_1(3)$	-	$6(6)3_2(6)4(3)4(6)3_2(6)3_2(6)$
$6(3)4(6)4(3)$	-	$4(3)4(6)3_1(6)3_1(6)3_2(6)3_1(6)$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$5^1 3^1$	4	p2mg, p2gg, p2	153
$5^2 3^2$	4	p2mg	154
$5^2 3^2$	4	p2gg	155
$5^2 3^2$	4	p2gg	156
$5^3 3^3$	4	p2gg	157
$5^3 3^3$	4	p2	158
$5^3 3^3$	4	cm, pg, p1	159
$5^2 3^2$	4	cm	160
$5^3 3^3$	4	pg	161
$6^3 3^2$	4,5	p6mm, p6	162
$6^1 3^2$	4,5	p6mm, p6	163
$6^2 3^2$	4,5	p6mm, p6	164
$6^2 3^2$	4,5	p6mm, p6	165
$6^3 3^6$	4,5	p6mm, p31m, c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	166
$6^1 3^2$	4,5	p6mm	167
$6^1 3^2$	4,5	p6mm	168
$6^1 3^3$	4,5	p6mm, p6, p31m	169
$6^1 3^2$	4,5	p6mm, p6, p3m1	170
$6^1 3^6$	4,5	p6mm, p31m	171
$6^1 3^2$	4,5	p6mm	172
$6^1 3^6$	4,5	p6mm	173
$6^3 3^1$	4,5	p6	174
$6^1 3^1$	4,5	p6	175
$6^1 3^1$	4,5	p6	176

Zerlegungssymbol

3-Eck - 6-Eck

$6_1(6)3_1(6)3_2(6)$	-	$6_2(6)3_1(3)6_1(3)3_2(6)3_2(3)3_1(6)$
$12(6)3_1(6)3_2(6)$	-	$12(3)3_2(6)3_3(6)3_2(3)3_1(6)3_1(3)$
$6(3)5(6)3_1(3)$	-	$5(3)3_1(3)5(6)3_2(6)5(6)3_2(6)$
$6_1(3)4(6)3_1(3)$	-	$6_2(6)4(3)3_1(3)4(6)6_2(6)3_2(6)$
$9(3)6(3)3(6)$	-	$(9(3)3(3))^3$
$4_1(3)4_1(6)3(6)$	-	$4_1(6)4_3(6)4_1(3)3(6)4_2(6)3(3)$
$4_1(3)4_2(6)4_2(3)$	-	$(4_2(3)4_2(6)4_3(6))^2$
$8(3)4_1(6)3(3)$	-	$4_1(6)4_2(6)4_3(6)4_2(6)4_1(3)3(3)$
$4_1(3)4_2(6)4_2(3)$	-	$4_2(3)4_2(6)3(6)4_3(6)3(6)3(6)$
$8(6)3_1(6)3_2(6)$	-	$8(3)3_2(6)3_2(3)3_1(6)4(6)3_1(3)$
$4_1(3)4_1(6)3(6)$	-	$(4_1(6)4_2(6)3(3))^2$
$4_1(3)4_2(6)3(6)$	-	$4_2(6)4_3(6)4_4(6)4_1(3)3(6)3(3)$
$4_1(6)4_1(6)3(6)$	-	$4_2(6)4_2(6)3(3)4_1(3)4_1(3)3(6)$
$4_1(6)4_2(3)4_2(6)$	-	$4_2(3)4_1(3)4_2(6)3(6)3(6)3(6)$
$4_1(6)4_2(3)4_3(6)$	-	$4_1(3)4_3(6)4_3(3)4_1(3)4_2(6)4_2(3)$
$5(3)5(6)4(3)$	-	$(5(3)4(6)4(3))^2$
$6(6)3(6)3(6)$	-	$6(6)6(3)3(6)3(3)3(6)3(3)$
$6(3)4_1(3)4_2(6)$	-	$6(3)4_2(6)3(6)3(6)3(6)4_2(3)$
$6(3)6(6)3(3)$	-	$(6(6)6(3)3(3))^2$
$6(3)6(6)3_1(6)$	-	$6(3)3_1(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)3_1(3)$
$4_1(3)4_1(6)3(6)$	-	$4_1(6)4_1(3)3(6)4_2(6)4_2(6)3(3)$
$4_1(3)4_2(6)4_3(3)$	-	$4_2(6)4_2(3)4_3(6)4_4(6)4_4(6)4_3(3)$
$6(3)4_1(3)4_2(6)$	-	$(6(3)4_2(6)4_2(3))^2$
$6(3)6(6)3(6)$	-	$(6(3)3(6)3(3))^2$
$5(6)4(6)3(3)$	-	$5(6)5(6)5(3)4(3)3(3)4(3)$
$5(3)5(6)4(3)$	-	$5(3)4(6)3(6)3(6)4(3)$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$6^3 3^3$	4,5	p6	177
$6^3 3^3$	4,5	p6	178
$6^1 3^2$	4,5	$p\bar{3}1m$	179
$6^1 3^2$	4,5	$p\bar{3}m1$	180
$6^1 3^6$	4,5	$p\bar{3}m1$	181
$6^2 3^2$	4,5	$p4mm$ $p4gm$, $p4$	182
$6^1 3^2$	4,5	$p4mm$ $p4$, $c2mm$	183
$6^1 3^2$	4,5	$p4mm$	184
$6^1 3^1$	4,5	$p4$	185
$6^3 3^3$	4,5	$p4$	186
$6^2 3^2$	4,5	$c2mm$, cm	187
$6^2 3^2$	4,5	$c2mm$, $p2mm$, $p2mg$, $p2$	188
$6^3 3^3$	4,5	$c2mm$, $p2mg$, $p2gg$, $p2$, cm	189
$6^2 3^2$	4,5	$c2mm$, $p2mg$, $p2$	190
$6^2 3^4$	4,5	$c2mm$, $p2mm$, $p2mg$, $p2$, pm	191
$6^1 3^4$	4,5	$c2mm$	192
$6^3 3^3$	4,5	$c2mm$, $p2mg$, $p2gg$, $p2$, cm	193
$6^1 3^2$	4,5	$c2mm$	194
$6^1 3^4$	4,5	$c2mm$	195
$6^2 3^2$	4,5	$c2mm$, $p2mg$, $p2gg$, $p2$, cm	196
$6^2 3^2$	4,5	$p2mm$, $p2mg$, $p2$, pm	197
$6^1 3^2$	4,5	$p2mm$	198
$6^1 3^4$	4,5	$p2mm$	199
$6^2 3^4$	4,5	$p2mm$, $p2mg$, $p2$, pm	200
$6^2 3^4$	4,5	$p2mg$	201
$6^1 3^2$	4,5	$p2mm$	202

Zerlegungssymbol

3-Eck - 6-Eck

$6(3)6(3)3_1(6)$	-	$6(3)3_1(3)6(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)$
$4_1(6)4_2(6)3(6)$	-	$4_1(3)4_2(6)4_2(6)3(3)4_2(6)3(3)$
$4_1(6)4_2(6)3(6)$	-	$4_2(3)4_1(3)3(6)4_2(6)4_2(3)3(6)$
$4_1(6)4_2(6)3(6)$	-	$4_2(3)4_1(3)3(6)3(3)4_2(6)4_2(6)$
$5(6)4(3)3(6)$	-	$5(6)4(3)5(3)4(6)5(3)3(3)$

3-Eck - 7-Eck

$4(7)3_1(7)3_2(7)$	-	$6(7)3_1(3)4(3)3_2(7)3_3(7)3_2(3)3_1(7)$
$(3_1(7))^3$	-	$3_1(3)3_1(7)3_2(7)3_3(7)3_2(7)3_3(7)3_2(7)$
$4(7)4(3)3_1(3)$	-	$4(3)4(7)3_2(7)3_3(7)3_2(7)3_3(7)3_2(7)$
$6(7)3_1(7)3_1(7)$	-	$6(3)3_1(7)3_2(7)3_1(3)3_1(7)3_2(7)3_1(3)$
$4_1(7)3(7)3(7)$	-	$4_1(3)3(7)4_2(7)3(3)3(7)4_2(7)3(3)$
$4_1(3)4_2(7)4_2(3)$	-	$4_2(3)4_2(7)3(7)3(7)4_2(3)4_2(7)3(7)$
$4(3)4(7)3_1(7)$	-	$4(3)3_1(7)3_1(3)4(7)3_2(7)3_2(7)3_2(7)$
$4(3)4(7)3_1(7)$	-	$4(7)4(3)3_1(7)3_2(7)3_2(7)3_2(7)3_1(3)$
$4_1(7)4_2(7)3(3)$	-	$4_2(3)4_1(7)4_3(7)4_3(7)4_4(3)4_2(3)5(3)$
$4_1(3)4_2(7)4_3(3)$	-	$4_2(3)4_3(7)4_3(3)4_2(7)3(7)3(7)3(7)$
$6(3)4(7)3(7)$	-	$6(3)3(7)3(3)4(7)4(3)3(7)3(3)$
$8(7)3_1(7)3_2(3)$	-	$8(7)8(3)3_1(7)3_1(3)3_2(3)3_1(7)3_1(3)$
$4(7)3(7)3(7)$	-	$4(7)4(7)4(3)3(7)3(3)3(7)3(3)$
$4(7)4(7)3_1(7)$	-	$4(3)4(3)3_1(7)3_2(7)3_2(7)3_2(7)3_1(3)$
$4(7)3_1(7)3_2(7)$	-	$4(7)4(7)3_2(3)4(7)3_2(3)3_1(7)3_1(3)$
$4(3)4(7)3_1(7)$	-	$4(3)3_1(7)3_2(7)3_2(7)4(3)3_1(7)3_2(7)$
$4(7)3_1(7)3_2(7)$	-	$4(7)4(3)3_2(7)4(3)3_1(7)3_1(3)3_2(7)$
$4_1(7)3_1(7)3_2(7)$	-	$4_2(7)4_2(7)3_1(3)4_1(3)3_2(7)3_2(3)3_1(7)$
$4(7)3(7)3(7)$	-	$4(7)3(3)3(7)4(3)3(7)4(7)3(3)$
$4(7)3_1(7)3_2(7)$	-	$4(3)3_2(7)4(7)3_1(3)4(7)3_1(3)3_2(7)$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$6^1 3^2$	4,5	p2mg	203
$6^3 3^3$	4,5	p2gg	204
$6^3 3^3$	4,5	p2gg	205
$6^3 3^3$	4,5	p2	206
$6^2 3^4$	4,5	cm	207
$7^3 3^3$	5	p6	208
$7^3 3^1$	5	p31m, p3	209
$7^1 3^1$	5	p31m, p3	210
$7^3 3^3$	5	p31m, p3	211
$7^3 3^3$	5	p4gm, p4	212
$7^1 3^2$	5	p4gm, p4	213
$7^2 3^2$	5	c2mm, p2gg, p2	214
$7^2 3^2$	5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	215
$7^2 3^4$	5	c2mm	216
$7^1 3^2$	5	c2mm	217
$7^2 3^4$	5	c2mm	218
$7^2 3^4$	5	c2mm	219
$7^3 3^3$	5	p2mg, p2gg, p2, pg	220
$7^3 3^3$	5	p2mg, p2gg, p2, pg	221
$7^3 3^3$	5	p2gg	222
$7^2 3^2$	5	p2gg	223
$7^3 3^3$	5	p2g	224
$7^3 3^3$	5	p2	225
$7^3 3^3$	5	cm, pg, p1	226
$7^3 3^3$	5	pg	227

Zerlegungssymbol

3-Eck - 8-Eck

$6_1(3)4(8)3(3)$	-	$(6_1(8)4(3)3(3)4(8))^2$
$12(3)3_1(8)4(3)$	-	$(4(3)3_1(3)4(8)3_2(8))^2$
$3_1(8)3_2(8)3_3(8)$	-	$6(8)3_1(3)3_3(8)3_4(8)3_3(3)3_2(8)3_2(3)3_1(8)$
$(3_1(8))^3$	-	$3_1(3)3_1(8)3_2(8)3_3(8)3_2(8)3_1(3)3_1(8)3_2(8)$
$4(8)4(3)3_1(3)$	-	$4(3)4(8)3_2(8)3_3(8)3_2(8)4(3)4(8)3_2(8)$
$6(3)3_1(8)4(3)$	-	$4(3)3_1(3)4(8)3_2(8)3_3(8)3_2(8)3_3(8)3_2(8)$
$9(8)3_1(8)3_2(3)$	-	$9(3)3_1(8)3_3(8)3_1(3)3_2(3)3_1(8)3_3(8)3_1(3)$
$4_1(3)4_2(8)4_2(3)$	-	$(4_2(3)4_2(8))^4$
$8(3)4_1(8)3(3)$	-	$(4_1(3)3(3)4_1(8)4_2(8))^2$
$8(3)6(8)3(3)$	-	$(6(3)3(3))^4$
$4(3)4(8)3(8)$	-	$(4(8)3(3))^4$
$6(3)3_1(8)3_2(8)$	-	$6(3)3_2(8)4(8)3_2(3)3_1(3)3_2(8)4(8)3_2(3)$
$3_1(8)3_2(8)3_3(8)$	-	$4_1(8)3_2(3)3_1(8)4_2(8)3_1(3)3_3(8)3_3(3)3_2(8)$
$3_1(8)3_2(8)3_2(8)$	-	$4(8)4(8)3_1(3)3_2(8)3_2(3)3_2(8)3_2(3)3_1(8)$
$4(8)4(8)3(8)$	-	$(4(3)4(3)3(8)3(3))^2$
$4_1(3)4_2(8)3(8)$	-	$4_1(8)4_1(3)3(8)3(3)4_2(8)4_2(3)3(8)3(3)$
$6(8)4(8)3(3)$	-	$(6(3)4(3)3(3)4(3))^2$
$4_1(8)4_2(3)3_1(8)$	-	$4_2(3)4_1(3)3_1(3)4_1(3)4_2(8)3_2(8)3_2(8)3_2(8)$
$5(8)3_1(8)3_2(3)$	-	$5(8)5(8)5(3)3_1(8)3_1(3)3_2(3)3_1(8)3_2(3)$
$4(8)3_3(8)3_1(8)$	-	$4(3)3_1(8)3_2(8)3_2(8)3_3(3)3_1(8)3_2(8)3_3(3)$
$4(8)3_2(8)3_1(8)$	-	$4(3)3_1(8)3_1(3)3_2(8)3_3(8)3_3(8)3_3(8)3_2(3)$
$5(3)3_1(8)3_2(8)$	-	$5(3)3_2(8)5(8)3_2(3)5(8)3_2(3)3_1(3)3_2(8)$

3-Eck - 9-Eck

$12(3)4(3)3(3)$	-	$(4(3)4(3)3(3))^3$
$(3_1(9))^3$	-	$(3_1(3)3_1(9)3_2(9))^3$

Koordinations- kurzsymb ^{ol}	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$8^1 3^4$	5,5	p6mm	228
$8^1 3^4$	5,5	p6mm	229
$8^3 3^3$	5,5	p6	230
$8^3 3^2$	5,5	p31m	231
$8^1 3^2$	5,5	p31m	232
$8^1 3^2$	5,5	p31m	233
$8^2 3^4$	5,5	p31m	234
$8^1 3^4$	5,5	p4mm, p4gm, p4, p2mm	235
$8^1 3^4$	5,5	p4mm	236
$8^1 3^8$	5,5	p4mm	237
$8^2 3^4$	5,5	p4gm, p4, p2gg	238
$8^2 3^4$	5,5	p4gm	239
$8^3 3^3$	5,5	p4	240
$8^3 3^6$	5,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	241
$8^3 3^6$	5,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	242
$8^2 3^4$	5,5	c2mm, p2mm, p2mg, p2, pm	243
$8^2 3^8$	5,5	c2mm	244
$8^2 3^4$	5,5	p2mg	245
$8^2 3^4$	5,5	p2mg	246
$8^3 3^3$	5,5	p2gg	247
$8^3 3^3$	5,5	p2	248
$8^2 3^4$	5,5	cm	249
$9^1 3^6$	6	p6mm	250
$9^3 3^3$	6	p3m1, p3, cm, pg, p1	251

Zerlegungssymbol

3-Eck - 9-Eck

$$\begin{aligned}
 4(9)4(3)3_1(3) &= (4(3)4(9)3_2(9'))^3 \\
 4_1(9)3_1(9)3_2(3) &= 4_1(9)4_2(9)4_2(3)4_1(3)3_1(9)3_1(3)3_2(3)3_1(9)3_1(3) \\
 3_1(9)3_2(9)3_2(9) &= 3_1(3)3_2(9)3_2(3)3_2(9)3_2(3)3_1(9)3_3(9)3_3(9)3_3(9) \\
 3_1(9)3_2(9)3_3(9) &= 3_1(9)3_1(3)3_3(3)3_4(3)3_4(9)3_2(3)3_5(9)3_4(9)3_2(3)
 \end{aligned}$$

3-Eck - 10-Eck

$$\begin{aligned}
 4(10)3(10)3(10) &= (4(3)3(10)3(3)3(10)3(3))^2 \\
 4_1(10)4_2(3)3(10) &= (4_1(3)3(3)4_1(3)4_2(10)4_2(3))^2 \\
 4(10)3_1(10)3_2(3) &= 4(3)3_1(10)3_1(3)3_2(3)3_1(10)3_1(3)4(10) \\
 &\quad 3_3(10)3_3(10)3_3(10) \\
 4(3)3_1(10)3_2(10) &= 4(10)3_3(10)3_3(3)3_1(3)3_2(10)3_3(10)4(3) \\
 &\quad 3_2(10)3_3(10)3_2(3)
 \end{aligned}$$

3-Eck - 12-Eck

$$\begin{aligned}
 (3(12))^3 &= (3(3)3(12))^6 \\
 4(12)4(3)3(3) &= (4(3)4(12))^6 \\
 6_1(3)6_2(12)3(3) &= (6_2(3)3(3))^6 \\
 6(3)4(12)3_1(3) &= (4(3)3_1(3)4(12)3_2(12))^3 \\
 8(3)4(12)3(3) &= (4(12)4(3)3(3))^4 \\
 6(12)3_1(12)3_2(3) &= (6(3)3_1(12)3_1(3)3_2(3)3_1(12)3_1(3))^2
 \end{aligned}$$

3-Eck - 14-Eck

$$4(14)3_1(14)3_2(3) = (4(14)4(3)3_1(14)3_1(3)3_2(3)3_1(14)3_1(3))^2$$

3-Eck - 18-Eck

$$5(3)4(18)3(3) = (4(18)4(3)3(3))^6$$

Koordinations- kurzsymb ^{ol}	F.-K. KZ	Fbenengruppe	Nummer im Bildteil
$9^1 3^3$	6	$p3m1, p3$	252
$9^2 3^4$	6	$c2mm$	253
$9^3 3^3$	6	$p2mg, p2gg, p2, pg$	254
$9^3 3^3$	6	$p2gg$	255
$10^3 3^6$	6,5	$c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm$	256
$10^2 3^8$	6,5	$c2mm$	257
$10^2 3^4$	6,5	$p2mg$	258
$10^2 3^4$	6,5	cm	259
$12^3 3^6$	7,5	$p6mm, p6, p31m, c2mm, p2mg,$ $p2gg, p2, cm$	260
$12^1 3^6$	7,5	$p6mm, p6, p31m$	261
$12^1 3^{12}$	7,5	$p6mm$	262
$12^1 3^6$	7,5	$p3m1$	263
$12^1 3^8$	7,5	$p4mm$	264
$12^2 3^8$	7,5	$c2mm$	265
$14^2 3^8$	8,5	$c2mm$	266
$18^1 3^{12}$	10,5	$p6mm$	267

Zerlegungssymbol

4-Eck - 4-Eck

$4_1(4_2)4_2(4_2)4_1(4_1)3(4_1)$	-	$6(4_2)4_1(4_1)4_2(4_1)4_1(4_2)$
$4_1(4_2)3_1(4_2)4_1(4_1)3_2(4_1)$	-	$12(4_2)4_2(4_2)4_1(4_1)3_1(4_2)$
$4_1(4_2)3_1(4_2)4_1(4_1)3_2(4_1)$	-	$12(4_2)4_2(4_2)3_1(4_1)4_1(4_2)$
$6_1(4_2)3_1(4_1)3_2(4_1)3_1(4_2)$	-	$6_1(4_2)6_2(4_2)6_1(4_1)3_1(4_1)$
$6_1(4_1)4_1(4_2)3(4_2)4_1(4_1)$	-	$6_2(4_2)4_2(4_2)3(4_1)4_1(4_2)$
$6_1(4_1)4_1(4_2)3(4_2)4_1(4_1)$	-	$6_2(4_2)4_2(4_2)4_1(4_1)3(4_2)$
$3_1(4_2)3_2(4_2)3_1(4_2)3_2(4_2)$	-	$12(4_2)6(4_2)3_2(4_1)3_1(4_2)$
$6_1(4_1)3(4_2)6_2(4_2)3(4_1)$	-	$6_2(4_1)3(4_1)6_2(4_1)3(4_1)$
$6_1(4_1)3_1(4_2)6_2(4_2)3_1(4_1)$	-	$6_2(4_1)3_1(4_1)6_2(4_2)3_2(4_2)$
$12(4_2)3_1(4_1)3_2(4_1)3_1(4_2)$	-	$(12(4_1)3_1(4_1))^2$
$5(4_2)4(4_1)3_1(4_1)4(4_2)$	-	$5(4_2)4(4_1)5(4_2)3_2(4_2)$
$6(4_1)3_1(4_1)6(4_2)3_2(4_2)$	-	$6(4_2)3_2(4_1)6(4_2)3_3(4_2)$
$4(4_1)3_1(4_1)4(4_2)3_2(4_2)$	-	$6_1(4_2)6_2(4_2)3_2(4_1)4(4_2)$
$6(4_2)4(4_1)3_1(4_1)4(4_2)$	-	$6(4_1)4(4_2)3_2(4_2)4(4_1)$
$9(4_1)3_1(4_1)9(4_2)3_3(4_2)$	-	$9(4_1)3_3(4_2)3_2(4_2)3_3(4_1)$
$(3(4_2))^4$	-	$8(4_2)8(4_2)3(4_1)3(4_2)$
$(4(4_2))^4$	-	$(4(4_1))^4$
$4_1(4_1)4_4(4_2)4_3(4_2)4_4(4_1)$	-	$4_2(4_2)4_4(4_1)4_3(4_1)4_4(4_2)$
$4_2(4_1)4_1(4_1)4_2(4_2)3(4_2)$	-	$8(4_2)3(4_1)4_2(4_2)4_3(4_2)$
$4_1(4_1)4_2(4_1)4_1(4_2)3(4_2)$	-	$8(4_2)4_1(4_1)3(4_2)4_3(4_2)$
$6(4_2)3(4_2)6(4_1)4_1(4_1)$	-	$6(4_1)3(4_2)4_2(4_2)3(4_1)$
$(8(4_2)3(4_2))^2$	-	$8(4_1)3(4_2)4(4_2)3(4_1)$
$(4_1(4_2))^4$	-	$4_2(4_2)4_1(4_2)4_1(4_1)4_1(4_2)$
$(4_1(4_1)4_2(4_2))^2$	-	$4_1(4_2)4_1(4_1)4_2(4_2)4_2(4_1)$
$4_1(4_1)4_2(4_1)4_3(4_2)4_4(4_1)$	-	$(4_3(4_2)4_4(4_1))^2$
$(4_1(4_2)4_2(4_2))^c$	-	$4_1(4_1)4_2(4_2)4_2(4_2)4_2(4_1)$

Koordinations- kurzsymbols	F.-K. KZ	Fbenengruppe	Nummer im Bildteil
$4_2^2 4_1^2$	4	p6mm, p6	268
$4_2^2 4_1^1$	4	p6mm	269
$4_2^2 4_1^1$	4	p6mm	270
$4_2^2 4_1^2$	4	p6mm, p6, p31m	271
$4_2^2 4_1^1$	4	p6mm	272
$4_2^2 4_1^1$	4	p6mm	273
$4_2^4 4_1^1$	4	p6mm	274
$4_2^2 4_1^4$	4	p6mm, p6	275
$4_2^2 4_1^2$	4	p6mm, p6	276
$4_2^2 4_1^4$	4	p6mm, p6	277
$4_2^2 4_1^1$	4	p31m	278
$4_2^2 4_1^1$	4	p31m	279
$4_2^2 4_1^1$	4	p3m1	280
$4_2^2 4_1^2$	4	p3m1, p3	281
$4_2^2 4_1^2$	4	p3m1, p3	282
$4_2^4 4_1^1$	4	p4mm, p4, c2mm	283
$4_2^4 4_1^4$	4	p4mm, p4gm, c2mm, p2mm, p2mg	284
$4_2^2 4_1^2$	4	p2gg, p2, cm, pm, pg, p1	285
$4_2^2 4_1^1$	4	p4mm, p4, c2mm	286
$4_2^2 4_1^1$	4	p4mm	287
$4_2^2 4_1^2$	4	p4mm, p4	288
$4_2^4 4_1^2$	4	p4mm, p4gm, p4	289
$4_2^4 4_1^1$	4	p4	290
$4_2^2 4_1^2$	4	c2mm, p2mm, p2mg, p2, cm, pm, pg	291
$4_2^1 4_1^2$	4	c2mm, p2mm, p2mg, p2, pm	292
$4_2^4 4_1^2$	4	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	293

Zerlegungssymbol

4-Eck - 4-Eck

$4_1(4_2)4_1(4_2)4_2(4_1)4_2(4_2)$	-	$4_1(4_1)4_1(4_1)4_2(4_2)4_2(4_1)$
$4_1(4_1)4_2(4_1)4_3(4_2)4_4(4_1)$	-	$4_4(4_1)4_3(4_2)4_5(4_2)4_5(4_2)$
$(5(4_2)3(4_2))^2$	-	$5(4_2)5(4_1)3(4_2)4(4_2)$
$5(4_1)5(4_1)5(4_2)3(4_2)$	-	$5(4_2)4_1(4_2)4_2(4_2)3(4_1)$
$5(4_1)5(4_1)5(4_2)3(4_2)$	-	$5(4_2)5(4_1)3(4_2)3(4_2)$
$(6(4_2)3(4_2))^2$	-	$(6(4_2)3(4_1))^2$
$6(4_2)4_1(4_2)3(4_2)4_1(4_2)$	-	$6(4_2)4_2(4_2)3(4_1)4_1(4_1)$
$(6(4_2)3(4_2))^2$	-	$6(4_2)4(4_2)4(4_2)3(4_1)$
$8(4_1)4_1(4_1)4_2(4_2)3(4_2)$	-	$8(4_1)3(4_2)3(4_1)4_2(4_2)$
$(6(4_2)3(4_2))^2$	-	$6(4_2)6(4_1)3(4_2)3(4_1)$
$(6(4_2)3(4_2))^2$	-	$6(4_1)3(4_2)4_1(4_2)4_2(4_2)$
$4_1(4_1)4_1(4_1)4_1(4_2)4_2(4_2)$	-	$4_2(4_2)4_2(4_2)4_2(4_1)4_1(4_1)$
$5(4_1)5(4_1)5(4_2)3(4_2)$	-	$5(4_1)3(4_2)4(4_2)4(4_2)$
$5(4_1)5(4_1)5(4_2)3(4_2)$	-	$(5(4_2)3(4_1))^2$
$5(4_2)4(4_2)3(4_2)4(4_2)$	-	$5(4_2)5(4_2)3(4_1)4(4_1)$
$6(4_2)3(4_1)3(4_2)4(4_1)$	-	$6(4_2)6(4_2)4(4_1)3(4_1)$
$6(4_1)6(4_2)4(4_2)3_1(4_2)$	-	$6(4_1)3_1(4_2)3_1(4_1)4(4_1)$
$5(4_1)5(4_2)5(4_2)3(4_2)$	-	$5(4_1)5(4_1)5(4_2)3(4_1)$
$6(4_1)6(4_2)4(4_2)3(4_2)$	-	$6(4_1)3(4_2)3(4_1)4(4_1)$

4-Eck - 5-Eck

$3_1(4)3_2(5)3_3(5)3_2(4)$	-	$12(5)12(5)3_3(4)3_2(4)3_3(5)$
$4(4)3_1(4)4(5)3_2(5)$	-	$6(5)4(4)3_2(5)3_2(4)4(5)$
$4(4)3_1(4)4(5)3_2(5)$	-	$6(5)3_2(4)4(5)4(4)3_2(5)$
$6_1(4)3_1(5)3_2(5)3_1(4)$	-	$6_2(5)6_2(5)3_2(4)3_1(4)3_2(5)$
$6(4)4(5)3_1(5)4(4)$	-	$4(4)3_1(5)3_1(4)4(5)3_2(5)$

Koordinations- kurzsymbols	F.-K. KZ	Ebene lgruppe	Nummer im Bildteil
$4_2^3 4_1^3$	4	c2mm, p2gg, p2, cm	294
$4_2^1 4_1^1$	4	c2mm, p2mm, p2mg, p2, pm	295
$4_2^4 4_1^1$	4	c2mm	296
$4_2^2 4_1^1$	4	c2mm	297
$4_2^2 4_1^2$	4	c2mm p2gg, p2	298
$4_2^4 4_1^2$	4	c2mm cm	299
$4_2^4 4_1^2$	4	c2mm	300
$4_2^4 4_1^1$	4	c2mm	301
$4_2^2 4_1^2$	4	c2mm	302
$4_2^4 4_1^2$	4	p2mm, p2mg, p2, pm	303
$4_2^4 4_1^1$	4	p2mm	304
$4_2^2 4_1^2$	4	p2mg, p2gg, p2, pg	305
$4_2^2 4_1^1$	4	p2mg	306
$4_2^2 4_1^2$	4	p2mg, p2gg, pg	307
$4_2^4 4_1^2$	4	p2mg	308
$4_2^2 4_1^2$	4	p2mg	309
$4_2^3 4_1^3$	4	p2mg	310
$4_2^3 4_1^3$	4	p2mg	311
$4_2^3 4_1^3$	4	p2	312
$5_2^2 4_1^2$	4,5	p6mm, p6	313
$5_2^2 4_1^2$	4,5	p6mm, p6	314
$5_2^2 4_1^2$	4,5	p6mm, p6	315
$5_2^2 4_1^2$	4,5	p6mm, p6	316
$5_2^2 4_1^2$	4,5	p6mm, p6	317

Zerlegungssymbol

4-Eck - 5-Eck

$6(4)4(5)3_1(5)4(4)$	-	$4(5)4(4)3_1(5)3_2(5)3_1(4)$
$4(5)3_1(4)3_2(4)3_2(5)$	-	$6(5)4(4)3_1(4)4(5)4(5)$
$6_1(5)3_1(5)3_2(4)3_2(5)$	-	$6_1(4)3_2(4)3_1(5)6_2(5)3_1(4)$
$6(4)3_1(5)4(5)3_1(4)$	-	$4(5)4(5)3_2(5)4(4)3_1(4)$
$12(5)3_2(5)3_1(4)3_1(5)$	-	$12(4)3_1(4)3_2(5)3_3(5)3_2(4)$
$4_1(4)3_1(4)4_1(5)3_2(5)$	-	$4_1(5)4_2(5)3_3(5)4_2(5)3_2(4)$
$9(5)3_1(5)3_2(5)3_1(5)$	-	$9(5)3_2(4)3_1(5)3_3(5)3_1(4)$
$(3(5))^4$	-	$4_1(5)4_2(5)4_1(5)3(4)3(5)$
$4(4)3_1(5)3_2(5)3_1(4)$	-	$8(5)8(5)3_2(4)3_1(4)3_2(5)$
$4_1(4)4_2(4)4_1(5)3(5)$	-	$4_1(5)4_1(4)3(5)4_3(5)3(4)$
$4_1(4)4_2(4)4_1(5)3(5)$	-	$4_1(5)4_3(5)4_1(4)3(5)3(4)$
$5(5)3(4)4(4)3(5)$	-	$5(5)5(4)3(4)5(4)3(4)$
$6(5)3_1(5)3_2(5)3_1(5)$	-	$6(4)3_1(5)4(5)3_1(4)3_2(5)$
$4_1(4)3(5)4_2(5)3(4)$	-	$4_2(5)4_3(5)4_2(5)4_2(4)3(4)$
$8(5)3_1(5)3_2(4)3_2(5)$	-	$8(4)3_2(4)3_1(5)4(5)3_1(4)$
$(3_1(5)3_2(5))^2$	-	$4_1(5)4_2(5)4_2(5)3_2(4)3_1(5)$
$(4_1(5)3(4))^2$	-	$4_1(5)4_2(5)4_2(5)4_1(4)3(4)$
$(4(5)3(5))^2$	-	$4(5)4(5)4(4)3(5)3(4)$
$4_1(5)3_1(5)4_1(5)3_2(5)$	-	$4_1(4)3_2(5)4_2(5)4_3(5)3_1(4)$
$4_1(4)4_2(5)3(4)3(5)$	-	$4_2(5)4_3(5)4_4(5)4_1(4)3(4)$
$4_1(4)4_1(4)4_1(5)3(5)$	-	$4_2(5)4_2(5)3(4)4_1(4)3(5)$
$4_1(4)4_1(4)4_2(5)3(4)$	-	$4_2(4)3(4)4_2(5)4_3(5)4_3(5)$
$4_1(5)4_2(5)3(5)4_2(5)$	-	$4_2(4)4_1(4)4_2(4)3(5)3(4)$
$4_1(5)4_2(4)4_3(4)3(5)$	-	$4_1(4)4_2(5)4_2(4)4_1(4)3(4)$
$(4(4)4(5))^2$	-	$4(4)4(5)3(5)3(5)3(5)$
$4_1(4)4_1(4)4_2(5)4_2(4)$	-	$4_2(4)4_2(5)3(5)3(5)3(5)$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$5^2 4^2$	4,5	p6mm, p6, p31m	318
$5^2 4^2$	4,5	p6	319
$5^3 4^3$	4,5	p6	320
$5^2 4^2$	4,5	p6	321
$5^3 4^3$	4,5	p6	322
$5^2 4^1$	4,5	p31m	323
$5^4 4^2$	4,5	p31m	324
$5^4 4^1$	4,5	p4mm, p4gm, p4, p2mm	325
$5^2 4^2$	4,5	p4mm, p4gm, p4	326
$5^2 4^2$	4,5	p4mm, p4	327
$5^2 4^2$	4,5	p4mm, p4, c2mm	328
$5^2 4^4$	4,5	p4gm	329
$5^4 4^2$	4,5	p4gm	330
$5^2 4^2$	4,5	p4	331
$5^3 4^3$	4,5	p4	332
$5^4 4^1$	4,5	c2mm	333
$5^2 4^2$	4,5	c2mm, cm	334
$5^4 4^2$	4,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	335
$5^4 4^2$	4,5	c2mm, p2mm, p2mg, p2, pm	336
$5^2 4^2$	4,5	c2mm, p2mm, p2mg, p2	337
$5^2 4^2$	4,5	c2mm, p2mg, p2, cm	338
$5^1 4^2$	4,5	c2mm	339
$5^4 4^4$	4,5	c2mm, p2gg, p2	340
$5^2 4^4$	4,5	c2mm	341
$5^2 4^1$	4,5	c2mm, p2mg, p2, cm	342
$5^1 4^1$	4,5	c2mm, p2mg, p2, cm	343

Zerlegungssymbol

4-Eck - 5-Eck

$6(5)3_1(5)3_2(5)3_1(5)$	-	$6(5) + (5)3_2(4)3_1(5)3_1(4)$
$6(4)4(5)3(4)3(5)$	-	$6(4)3(4)4(5)4(4)3(4)$
$6(4)6(5)3(5)3(5)$	-	$6(4)3(5)3(4)3(5)3(4)$
$8(5)3_1(4)3_1(5)3_2(4)$	-	$8(5)3(4)3_1(4)3_2(4)3_1(4)$
$4_1(4)4_2(4)4_3(4)3(5)$	-	$4_1(4)4_2(5)4_4(5)4_1(4)3(4)$
$4_1(5)4_2(4)4_3(5)3(5)$	-	$4_3(5)4_2(4)4_1(4)3(5)3(4)$
$5(5)3_1(5)3_2(5)3_1(5)$	-	$5(5, 5(4)3_1(5)3_1(4)3_2(5)$
$6(5)3_1(4)3_1(5)3_2(5)$	-	$6(5, 6(4)3_1(4)3_2(5)3_2(4)$
$(4(5)3(5))^2$	-	$4(5, 4(4)3(5)4(4)3(5)$
$4_1(5)4_2(5)3(4)3(5)$	-	$4_1(4)4_2(5)4_2(5)4_2(4)3(4)$
$4_1(5)4_2(5)4_2(5)3(5)$	-	$4_2(4)4_2(4)4_1(4)3(5)3(4)$
$4_1(5)4_2(4)4_2(5)3(5)$	-	$4_2(4)4_1(4)3(5)4_2(4)3(5)$
$6(5)3_1(5)3_2(4)3_2(5)$	-	$6(5)3_1(4)3_2(4)6(5)3_1(4)$
$4_1(5)4_2(5)3(4)3(5)$	-	$4_2(4)4_1(5)4_1(5)4_1(4)3(4)$
$4_1(4)4_1(5)4_2(5)3(5)$	-	$4_2(4)4_1(5)4_1(4)3(5)3(4)$
$6(5)3_1(4)3_1(5)3_2(5)$	-	$6(5)6(4)3_2(5)3_2(4)3_1(4)$
$5(5)3_1(5)3_2(5)3_1(5)$	-	$5(5)3_1(4)5(5)3_1(4)3_2(5)$

4-Eck - 6-Eck

$(3_1(6)3_2(6))^2$	-	$6(6)3_2(4)3_1(6)3_3(6)3_1(4)3_2(6)$
$3_1(4)3_2(6)3_3(6)3_2(4)$	-	$6(6)4(6)3_3(4)3_2(4)3_3(6)4(6)$
$6(4)3_1(6)3_2(6)3_1(4)$	-	$4(6)3_3(6)4(6)3_2(4)3_1(4)3_2(6)$
$6(4)3(6)4(6)3(4)$	-	$(4(4)3(4))^3$
$6(4)6(4)3(6)3(4)$	-	$(3(4))^6$
$12(4)4(4)3_1(6)3_2(4)$	-	$(3_1(4)3_2(4))^3$
$4(4)4(6)4(4)3(4)$	-	$(4(4))^6$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenen- gruppe	Nummer im Bildteil
------------------------------	-------------	-------------------	-----------------------

$5^4 4^2$	4,5	c2mm	344
$5^2 4^4$	4,5	c2mm	345
$5^3 4^3$	4,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	346
$5^2 4^4$	4,5	c2mm	347
$5^1 4^2$	4,5	p2mm	348
$5^3 4^3$	4,5	p2mg	349
$5^4 4^2$	4,5	p2mg	350
$5^3 4^3$	4,5	p2mg	351
$5^4 4^2$	4,5	p2gg	352
$5^3 4^3$	4,5	p2gg	353
$5^4 4^4$	4,5	p2gg	354
$5^3 4^3$	4,5	p2gg	355
$5^3 4^3$	4,5	p2gg	356
$5^3 4^3$	4,5	p2	357
$5^3 4^3$	4,5	p2	358
$5^3 4^3$	4,5	p2	359
$5^4 4^2$	4,5	cm	360

$6^4 4^2$	5	p6mm, p6	361
$6^2 4^2$	5	p6mm, p6, p3m1	362
$6^2 4^2$	5	p6mm, p6	363
$6^2 4^6$	5	p6mm, p6	364
$6^1 4^6$	5	p6mm, p6, p3m1	365
$6^1 4^6$	5	p6mm	366
$6^1 4^6$	5	p6	367

Zerlegungssymbol

4-Eck - 6-Eck

$4(6)3_1(4)3_2(4)3_1(6)$	-	$4(6)3_3(6)4(6)3_3(6)4(4)3_1(4)$
$4(4)3_1(4)4(6)3_2(6)$	-	$(4(6)3_2(4))^3$
$5(6)3_1(4)3_2(4)3_1(6)$	-	$5(4)3_1(4)5(4)3_1(4)5(6)3_3(6)$
$5(4)3_1(4)5(6)3_2(4)$	-	$(5(4)3_2(4))^3$
$3_1(4)3_3(6)3_2(6)3_3(4)$	-	$6(6)3_2(4)3_3(4)3_2(6)6(6)3_4(6)$
$4(4)3_1(4)4(6)3_2(6)$	-	$4(4)3_2(6)3_3(6)3_2(4)4(6)3_3(6)$
$6(6)3_1(4)3_2(4)3_1(6)$	-	$(6(4)3_1(4))^3$
$(3(6))^4$	-	$(4(6)3(4)3(6))^2$
$4_1(4)3_1(6)3_2(6)3_1(4)$	-	$4_2(6)4_3(6)4_2(6)3_2(4)3_1(4)3_2(6)$
$(3_1(6))^4$	-	$4(6)3_2(6)3_2(6)3_1(4)3_1(6)3_2(6)$
$3_1(6)3_2(6)3_3(6)3_2(6)$	-	$4_1(6)4_2(6)3_1(4)3_2(6)3_2(4)3_3(6)$
$(4(6)3(4))^2$	-	$(4(6)4(4)3(4))^2$
$(4(6)3_1(6))^2$	-	$4(4)3_1(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)3_1(4)$
$4(6)3_1(6)4(6)3_2(6)$	-	$4(4)3_2(6)3_2(4)4(4)3_1(6)3_1(4)$
$4(6)4(6)3(4)3(6)$	-	$(4(4)4(4)3(4))^2$
$4(4)4(6)3(6)3(6)$	-	$4(6)4(4)3(6)3(4)3(6)3(4)$
$4(4)4(6)3_1(4)3_1(6)$	-	$4(4)3_1(4)4(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)$
$4_1(4)4_2(6)3(4)3(6)$	-	$4_1(6)4_1(4)3(4)4_2(6)4_2(4)3(4)$
$4(4)4(4)4(6)3(6)$	-	$(4(4)3(6)3(4))^2$
$4_1(4)4_2(4)4_2(4)3(6)$	-	$(4_1(6)4_1(4)3(4))^2$
$4_1(4)4_2(4)4_3(4)3_1(6)$	-	$4_1(4)3_1(4)4_1(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)$
$6(4)4(4)3_1(6)3_2(6)$	-	$6(4)3_2(6)3_2(4)3_1(4)3_2(6)3_2(4)$
$4_1(4)4_2(4)4_3(4)3(6)$	-	$(4_1(6)4_1(4)3(4))^2$
$4_1(6)3_1(4)3_1(6)3_2(6)$	-	$4_2(6)4_2(6)3_2(4)3_1(4)4_1(4)3_2(6)$
$(4(4)3_1(6))^2$	-	$4(4)3_1(4)4(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)$
$4(6)4(6)3(6)3(6)$	-	$4(4)4(4)3(6)3(4)3(6)3(4)$

Koordinations- kurzsymb ^{ol}	F,-K. KZ	Ebenenengruppe	Nummer im Bildteil
$6^2 4^2$	5	$p\bar{3}1m$, $p\bar{3}$	368
$6^2 4^3$	5	$p\bar{3}1m$	369
$6^2 4^4$	5	$p\bar{3}1m$	370
$6^1 4^6$	5	$p\bar{3}1m$	371
$6^2 4^2$	5	$p\bar{3}m1$, $p\bar{3}$	372
$6^2 4^2$	5	$p\bar{3}m1$, $p\bar{3}$	373
$6^2 4^6$	5	$p\bar{3}m1$, $p\bar{3}$	374
$6^4 4^2$	5	$p4mm$, $p4gm$, $p4$, $c2mm$, cm	375
$6^2 4^2$	5	$p4mm$, $p4gm$, $p4$	376
$6^4 4^1$	5	$p4$	377
$6^4 4^2$	5	$c2mm$, $p2mm$, $p2mg$, $p2$, pm	378
$6^2 4^4$	5	$c2mm$, cm	379
$6^4 4^2$	5	$c2mm$, $p2mg$, $p2gg$, $p2$, cm	380
$6^4 4^4$	5	$c2mm$, $p2mm$, $p2mg$, $p2gg$, $p2$ pm , pg , $p1$	381
$6^3 4^6$	5	$c2mm$, $p2gg$, $p2$, cm	382
$6^3 4^3$	5	$c2mm$, $p2mg$, $p2gg$, $p2$, cm	383
$6^2 4^2$	5	$c2mm$, $p2gg$, $p2$	384
$6^2 4^4$	5	$c2mm$, $p2mm$, $p2mg$, $p2$, pm	385
$6^2 4^4$	5	$c2mm$, $p2mg$, $p2$, cm	386
$6^1 4^4$	5	$c2mm$	387
$6^1 4^2$	5	$c2mm$	388
$6^2 4^4$	5	$c2mm$	389
$6^1 4^4$	5	$p2mm$	390
$6^3 4^3$	5	$p2mg$	391
$6^2 4^2$	5	$p2mg$, $p2gg$, $p2$, pg	392
$6^4 4^4$	5	$p2mg$, $p2gg$, $p2$, pg	393

Zerlegungssymbol

4-Eck - 6-Eck

$$\begin{aligned}
 4_1(6)4_2(6)3(4)3(4) & - 4_1(4)3(4)4_2(4)4_1(4)4_2(4)3(4) \\
 4(4)4(4)4(6)3(6) & - 4(4)3_1(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6)3_1(4) \\
 4_1(4)4_2(4)4_2(4)3_1(6) & - 4_1(4)3_1(4)4_1(6)3_2(6)3_2(6)3_2(6) \\
 5(4)3_1(6)3_2(4)3_2(6) & - 5(6)5(6)5(4)3_2(4)3_1(4)3_2(4) \\
 5(4)5(4)3_1(6)3_2(6) & - 5(4)3_2(6)3_2(4)3_1(4)3_2(6)3_2(4) \\
 4(6)3_1(4)3_1(6)3_2(6) & - 4(6)4(6)3_2(4)4(6)3_2(4)3_1(4) \\
 4(6)3_1(6)3_2(4)3_2(6) & - 4(6)4(6)4(4)3_2(4)3_1(6)3_1(4) \\
 4(4)4(6)3_1(6)3_2(6) & - 4(4)3_1(6)3_1(4)3_2(6)4(4)3_2(6) \\
 4(6)3_1(6)3_2(4)3_2(6) & - 4(6)4(6)4(4)3_2(4)3_1(6)3_1(4) \\
 4_1(6)3_1(4)3_1(6)3_2(6) & - 4_2(6)4_2(6)3_2(4)3_1(4)4_1(4)3_2(6)
 \end{aligned}$$

4-Eck - 7-Eck

$$\begin{aligned}
 3_1(4)3_2(7)3_3(7)3_2(4) & - 6(7)3_4(7)3_3(4)3_2(4)3_3(7)3_4(7)3_4(7) \\
 3_1(7)3_2(4)3_2(7)3_3(7) & - 6(7)3_1(4)3_3(7)3_4(7)3_3(4)3_2(4)3_1(7) \\
 6(4)3_1(7)3_2(7)3_1(4) & - 3_1(4)3_2(7)3_3(7)3_3(7)3_4(7)3_3(7)3_2(4) \\
 (3_1(7))^4 & - 3_1(4)3_1(7)3_2(7)3_1(4)3_1(7)3_2(7)3_2(7) \\
 3_1(4)3_1(7)3_2(7)3_2(7) & - 4(7)3_2(4)3_2(7)4(7)3_2(4)3_1(4)3_2(7) \\
 4_1(4)3_1(7)3_2(7)3_1(4) & - 4_2(7)3_3(7)3_3(7)3_2(4)3_1(4)3_2(7)3_3(7) \\
 (3_1(7)3_2(7))^2 & - 3_1(4)3_2(7)3_2(4)3_1(7)3_3(7)3_3(7)3_3(7) \\
 4(7)3_1(7)3_2(7)3_1(7) & - 4(4)3_1(7)3_1(4)3_2(7)3_2(4)3_1(7)3_1(4) \\
 4_1(4)3_1(7)3_2(4)3_2(7) & - 4_1(7)4_2(7)4_2(7)4_1(4)3_2(4)3_1(4)3_2(4) \\
 4_1(4)4_2(7)3_1(7)3_2(4) & - 4_2(7)4_2(4)3_1(7)3_1(4)3_2(4)3_1(7)3_1(4) \\
 3_1(7)3_2(4)3_2(7)3_3(7) & - 4(7)4(7)3_1(4)3_3(7)3_3(4)3_2(4)3_1(7) \\
 4_1(7)3_1(7)3_2(4)3_2(7) & - 4_1(4)3_2(4)3_1(7)3_3(7)3_3(7)3_3(7)3_1(4) \\
 4(7)3_1(7)3_2(7)3_2(7) & - 4(4)3_3(7)3_3(4)3_2(7)3_1(4)3_2(7)3_1(4) \\
 3_1(7)3_2(7)3_3(4)3_3(7) & - 4(7)4(7)3_1(4)3_3(4)3_2(7)3_2(4)3_1(7) \\
 4(7)3_1(4)3_1(7)3_2(7) & - 4(4)3_2(7)3_3(7)3_3(7)3_3(7)3_2(4)3_1(4)
 \end{aligned}$$

Koordinations- kurzsymbolsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
$6^3 4^6$	5	p2mg	394
$6^2 4^2$	5	p2mg, f2gg, p2, pg	395
$6^1 4^2$	5	p2mg	396
$6^2 4^4$	5	p2mg	397
$6^2 4^4$	5	p2mg	398
$6^3 4^3$	5	p2gg	399
$6^3 4^3$	5	p2gg	400
$6^3 4^3$	5	p2gg	401
$6^3 4^3$	5	p2	402
$6^3 4^3$	5	p2	403
$7^2 4^2$	5,5	p6	404
$7^3 4^3$	5,5	p6	405
$7^2 4^2$	5,5	p6	406
$7^4 4^2$	5,5	p4gm, p4, p2gg	407
$7^3 4^3$	5,5	p4gm, p4, p2gg	408
$7^2 4^2$	5,5	p4	409
$7^4 4^2$	5,5	c2mm, p2mg, pcgg, p2, cm	410
$7^4 4^4$	5,5	c2mm, p2gg, p2	411
$7^2 4^4$	5,5	c2mm	412
$7^2 4^4$	5,5	c2mm	413
$7^3 4^3$	5,5	p2mg	414
$7^3 4^3$	5,5	p2gg	415
$7^4 4^4$	5,5	pcgg	416
$7^3 4^3$	5,5	p2	417
$7^3 4^3$	5,5	p2	418

Zerlegungssymbol

4-Eck - 8-Eck

$$\begin{aligned}
 3_1(4)3_2(8)3_3(8)3_2(4) & - (6(8)3_3(4)3_2(4)3_3(8))^2 \\
 6(4)3_1(8)3_2(8)3_1(4) & - (3_1(4)3_2(8)3_3(8)3_2(4))^2 \\
 3_1(4)3_2(8)3_3(8)3_2(4) & - 3_2(4)3_3(8)3_4(8)3_5(8)3_4(8)3_5(8)3_4(8)3_3(4) \\
 (3(8))^4 & - (3(4)3(8))^4 \\
 4_1(4)3_1(8)3_2(8)3_1(4) & - (4_2(8)3_2(4)3_1(4)3_2(8))^2 \\
 4_1(4)3(8)4_2(4)3(4) & - (4_2(4)3(4))^4 \\
 8(4)3_1(8)3_2(4)4(4) & - (3_1(4)3_2(4))^4 \\
 6(4)3_1(8)3_2(4)3_2(8) & - (6(4)3_2(4)3_1(4)3_2(4))^2 \\
 4(4)3_1(8)3_2(4)3_2(8) & - 4(4)3_2(4)3_1(4)3_2(4)4(8)3_3(8)3_3(8)3_3(8) \\
 4(8)3_1(8)3_2(4)3_3(8) & - 4(4)3_3(4)4(4)3_1(8)3_1(4)3_2(4)3_1(8)3_1(4) \\
 4(8)3_1(8)3_2(4)3_2(8) & - 4(4)3_1(8)3_1(4)4(4)3_2(4)3_1(8)3_1(4)3_2(4) \\
 3_1(4)3_1(8)3_2(8)3_3(8) & - 3_4(8)3_4(8)3_3(4)3_2(8)3_4(8)3_3(4)3_1(4)3_2(8) \\
 3_1(8)3_2(8)3_3(4)3_3(8) & - 3_1(4)3_3(4)3_2(8)3_2(4)3_1(8)3_4(8)3_4(8)3_4(8) \\
 3_1(8)3_2(4)3_2(8)3_3(8) & - 3_3(4)3_2(4)3_1(8)3_1(4)3_3(8)3_4(8)3_4(8)3_4(8) \\
 4(8)3_1(4)3_1(8)3_2(8) & - 4(4)3_2(8)3_2(4)3_1(4)4(4)3_2(8)3_2(4)3_1(4)
 \end{aligned}$$

4-Eck - 9-Eck

$$\begin{aligned}
 6(4)3_1(9)3_2(9)3_1(4) & - (3_2(4)3_1(4)3_2(9))^3 \\
 4(4)3_1(9)3_2(9)3_1(4) & - 3_2(4)3_1(4)3_2(9)3_3(9)3_3(9)3_2(4) \\
 & \quad 3_1(4)3_2(9)3_3(9)
 \end{aligned}$$

4-Eck - 10-Eck

$$\begin{aligned}
 3_1(4)3_2(10)3_3(10)3_2(4) & - 3_4(10)3_5(10)3_4(10)3_3(4)3_2(4)3_3(10) \\
 & \quad 3_4(10)3_3(4)3_2(4)3_3(10) \\
 3_1(4)3_1(10)3_2(10)3_2(10) & - (3_1(4)3_2(10)3_2(4)3_2(10)3_2(4))^2 \\
 4(4)3_2(10)3_1(4)3_1(10) & - (4(10)4(4)3_1(4)3_2(4)3_1(4))^2 \\
 3_1(10)3_2(4)3_2(10)3_3(10) & - 3_1(10)3_1(4)3_2(4)3_3(10)3_3(4)3_2(4) \\
 & \quad 3_1(10)3_1(4)3_3(10)3_3(4)
 \end{aligned}$$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
------------------------------	-------------	--------------	-----------------------

$8^2 4^4$	6	p6mm, p6	419
$8^2 4^4$	6	p6mm, p6, p31m	420
$8^2 4^2$	6	p31m, p3	421
$8^4 4^4$	6	p4mm, p4gm, p4, c2mm, p2mm, p2mg, p2gg, p2, cm, pm, pg, p1	422
$8^2 4^4$	6	p4mm, p4gm, p4	423
$8^2 4^8$	6	p4mm, p4, c2mm	424
$8^1 4^8$	6	p4mm	425
$8^2 4^8$	6	c2mm	426
$8^2 4^4$	6	p2mg	427
$8^3 4^6$	6	p2mg	428
$8^3 4^6$	6	p2mg	429
$8^3 4^3$	6	p2gg	430
$8^3 4^3$	6	p2gg	431
$8^3 4^3$	6	p2	432
$8^3 4^6$	6	p2	433
$9^2 4^6$	6,5	p6mm, p6	434
$9^2 4^4$	6,5	p4gm, p4	435
$10^2 4^4$	7	p31m	436
$10^3 4^6$	7	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	437
$10^2 4^8$	7	c2mm	438
$10^3 4^6$	7	p2mg	439

Zerlegungssymbol

4-Eck - 12-Eck

$$\begin{aligned}
 4(12)3_1(4)3_2(4)3_1(12) & - (4(4)3_1(4))^6 \\
 6(4)4(4)3_1(12)3_2(4) & - (3_1(4)3_2(4))^6 \\
 3_1(4)3_2(12)3_2(4) & - (3_3(4)3_2(4)3_3(12)3_4(12))^3 \\
 4(4)3_1(12)3_2(12)3_1(4) & - (3_2(4)3_1(4)3_2(12))^4
 \end{aligned}$$

4-Eck - 18-Eck

$$3_1(4)3_2(18)3_3(18)3_2(4) - (3_3(4)3_2(4)3_3(18))^6$$

5-Eck - 5-Eck

$$\begin{aligned}
 6(5_1)3_1(5_2)3_2(5_2)4(5_2)3_1(5_1) & - 4(5_1)3_2(5_2)3_3(5_2)3_2(5_1)3_1(5_1) \\
 6(5_2)3_1(5_2)3_2(5_1)3_3(5_1)3_2(5_2) & \dots 6(5_1)3_2(5_1)3_1(5_2)3_4(5_2)3_1(5_1) \\
 4_1(5_1)3_1(5_2)4_2(5_1)3_2(5_2)3_1(5_1) & \dots 4_2(5_2)4_2(5_1)3_1(5_1)3_2(5_1)3_1(5_1) \\
 4_1(5_1)3_1(5_2)3_2(5_2)4_2(5_2)3_1(5_1) & \dots 4_3(5_2)3_2(5_1)3_1(5_1)4_2(5_1)3_2(5_2) \\
 4_1(5_1)4_2(5_2)3_1(5_1)3_1(5_2)3_2(5_1) & - 4_2(5_2)4_2(5_1)3_1(5_1)3_2(5_1)3_1(5_1) \\
 4(5_2)3_1(5_2)4(5_2)3_2(5_1)3_2(5_2) & - 4(5_1)3_2(5_1)4(5_1)3_1(5_2)3_1(5_1) \\
 4_1(5_1)4_1(5_1)3_1(5_2)3_2(5_2)3_1(5_1) & - 4_2(5_2)4_2(5_2)3_2(5_1)3_1(5_1)3_2(5_2) \\
 4(5_2)4(5_1)3_1(5_1)3_1(5_1)3_1(5_1) & - 4(5_1)4(5_2)3_2(5_2)3_2(5_2)3_2(5_2) \\
 4_1(5_1)4_2(5_2)3_1(5_2)3_2(5_1)3_2(5_2) & - 4_1(5_2)4_2(5_1)3_1(5_2)3_1(5_1)3_2(5_1) \\
 4(5_1)4(5_1)4(5_2)3(5_2)3(5_2) & - 4(5_1)3(5_2)3(5_1)3(5_2)3(5_1) \\
 4(5_2)4(5_2)3_1(5_2)3_2(5_1)3_2(5_2) & - 4(5_1)4(5_1)3_1(5_2)3_1(5_1)3_2(5_1) \\
 4(5_1)4(5_2)3_1(5_1)3_1(5_2)3_2(5_2) & - 4(5_2)3_2(5_1)4(5_2)3_2(5_1)3_1(5_1) \\
 4(5_1)4(5_2)3_1(5_2)3_2(5_1)3_2(5_2) & - 4(5_2)4(5_1)3_2(5_1)3_1(5_2)3_1(5_1) \\
 4_1(5_2)4_2(5_2)3_1(5_2)3_2(5_1)3_2(5_2) & - 4_2(5_1)4_1(5_1)3_2(5_1)3_1(5_2)3_1(5_1) \\
 4(5_2)4(5_1)3_1(5_2)3_2(5_2)3_1(5_1) & - 4(5_1)4(5_2)3_2(5_1)3_1(5_1)3_2(5_2) \\
 4(5_2)3_1(5_2)3_2(5_1)4(5_2)3_2(5_1) & - 4(5_2)3_1(5_1)3_2(5_1)4(5_2)3_1(5_1)
 \end{aligned}$$

Koordinations- kurzsymb ^{ol}	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
--	-------------	--------------	-----------------------

$12^2 4^{12}$	8	p6mm, p6, p31m	440
$12^1 4^{12}$	8	p6mm	441
$12^2 4^6$	8	p3m1, p3	442
$12^2 4^8$	8	p4mm, p4gm, p4, c2mm	443

$18^2 4^{12}$	11	p6mm, p6, p31m	444
---------------	----	----------------	-----

$5_2^3 5_1^3$	5	p6	445
$5_2^3 5_1^3$	5	p3	446
$5_2^2 5_1^4$	5	p4gm, p4	447
$5_2^3 5_1^3$	5	p4	448
$5_2^2 5_1^4$	5	c2mm	449
$5_2^4 5_1^4$	5	c2mm, p2gg, p2	450
$5_2^2 5_1^2$	5	p2mm, p2mg, p2, pm	451
$5_2^1 5_1^1$	5	p2mg, p2gg, p2, pg	452
$5_2^3 5_1^3$	5	p2mg	453
$5_2^3 5_1^3$	5	p2mg, p2gg, p2, pg	454
$5_2^4 5_1^4$	5	p2gg	455
$5_2^3 5_1^3$	5	p2gg	456
$5_2^3 5_1^3$	5	p2	457
$5_2^4 5_1^4$	5	p2	458
$5_2^3 5_1^3$	5	cm, pg, p1	459
$5_2^3 5_1^3$	5	pg	460

Zerlegungssymbol

5-Eck - 6-Eck

$$\begin{aligned}
 4(5)3_1(5)4(5)3_2(6)3_2(5) &= (3_2(5))^6 \\
 6(5)3_1(6)3_2(5)3_2(6)3_1(5) &= (3_1(5)3_2(5))^3 \\
 3_1(5)3_2(6)3_3(6)3_4(6)3_2(5) &= 6(6)3_4(5)3_3(6)3_3(5)3_2(5)3_4(6) \\
 6(5)3_1(6)3_2(6)3_3(6)3_1(5) &= 3_4(6)3_2(5)3_1(5)3_3(6)3_3(5)3_2(6) \\
 4(6)3_1(5)3_2(5)3_1(6)3_3(5) &= 4(6)3_4(6)4(5)3_1(5)3_3(5)3_1(5) \\
 4_1(5)3_1(6)3_3(6)3_2(6)3_1(5) &= 4_2(6)3_3(5)3_1(5)3_2(6)3_2(5)3_3(6) \\
 3_1(6)3_2(5)3_2(6)3_2(5)3_2(6) &= 4(6)4(6)3_1(5)3_2(5)3_2(5)3_1(6) \\
 4(6)3(5)3(6)3(5)3(6) &= (4(5)3(5)3(5))^2 \\
 4(6)3_1(6)3_2(5)3_2(6)3_1(6) &= 4(5)3_1(6)3_1(5)3_2(5)3_1(6)3_1(5) \\
 4(5)4(5)3_1(6)3_2(6)3_1(5) &= 3_2(5)3_1(5)3_2(6)3_3(6)3_3(6) \\
 4_1(5)4_2(5)3_1(6)3_2(6)3_3(5) &= 3_1(5)3_2(6)3_2(5)3_3(5)3_2(6)3_2(5) \\
 4(6)3_1(5)3_2(6)3_3(5)3_3(6) &= 4(5)3_3(5)3_2(5)3_3(5)4(5)3_1(5) \\
 4(6)3_1(5)3_1(6)3_2(6)3_3(6) &= 4(5)3_3(6)3_3(5)3_2(6)3_2(5)3_1(5)
 \end{aligned}$$

5-Eck - 7-Eck

$$\begin{aligned}
 3_1(5)3_2(7)3_3(7)3_3(7)3_2(5) &= 3_3(5)3_2(5)3_3(7)3_4(7)3_3(5)3_3(7)3_4(7) \\
 3_1(5)3_1(7)3_2(7)3_3(7)3_2(7) &= 3_2(7)3_2(5)3_1(5)3_2(7)3_2(5)3_3(7)3_3(5) \\
 3_2(7)3_1(5)3_1(7)3_1(5)3_1(7) &= 3_2(5)3_1(5)3_1(5)3_2(7)3_3(7)3_3(7)3_3(7) \\
 3_1(7)3_2(7)3_3(5)3_3(7)3_4(7) &= 3_1(7)3_2(5)3_1(7)3_2(5)3_3(5)3_4(7)3_4(7)
 \end{aligned}$$

5-Eck - 8-Eck

$$\begin{aligned}
 4(5)3_1(8)3_2(5)3_2(8)3_1(5) &= (3_1(5)3_2(5))^4 \\
 3_1(5)3_2(5)3_2(8)3_2(5)3_2(8) &= (3_1(8)3_1(5)3_2(5)3_2(5))^2 \\
 3_1(5)3_1(8)3_2(5)3_3(8)3_4(8) &= 3_4(8)3_4(5)3_3(5)3_4(8)3_4(5) \\
 &= 3_1(5)3_2(5)3_1(5)
 \end{aligned}$$

5-Eck - 12-Eck

$$3_1(5)3_2(12)3_3(5)3_3(12)3_4(5) = (3_2(5)3_3(5))^6$$

Koordinations- kurzsymbolsymbol	F.-K. KZ	Ebenen- gruppe	Nummer im Bildteil
$6^1 5^6$	5,5	p6mm, p6, p31m	461
$6^2 5^6$	5,5	p6mm, p6	462
$6^3 5^3$	5,5	p6	463
$6^3 5^3$	5,5	p6	464
$6^2 5^4$	5,5	p31m	465
$6^3 5^3$	5,5	p4	466
$6^3 5^3$	5,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	467
$6^3 5^6$	5,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	468
$6^4 5^4$	5,5	c2mm, p2gg, p2	469
$6^2 5^2$	5,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	470
$6^2 5^4$	5,5	c2mm, p2mm, p2mg, p2, pm	471
$6^3 5^6$	5,5	p2mg	472
$6^4 5^4$	5,5	p2	473
$7^3 5^3$	6	p31m, p3	474
$7^4 5^4$	6	c2mm, p2gg, p2	475
$7^3 5^3$	6	p2mg, p2gg, p2, pg	476
$7^4 5^4$	6	p2gg	477
$8^2 5^8$	6,5	p4mm, p4gm, p4, c2mm	478
$8^3 5^6$	6,5	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	479
$8^3 5^6$	6,5	p2mg	480
$12^2 5^{12}$	8,5	p6mm, p6, p31m	481

Zerlegungssymbol

6-Eck - 6-Eck

$$\begin{aligned}
 (3(6_2))^6 &= (3(6_2)3(\epsilon_1))^3 \\
 (3_1(2))^6 &= (3_1(6_1)3_1(6_2)3_2(6_2))^2 \\
 (3_1(6_2))^6 &= 3_1(6_1)3_1(6_2)3_2(6_2) \\
 &\quad 3_3(6_2)3_2(6_2)3_2(6_2) \\
 (3_1(6_1)3_1(6_2)3_2(6_2))^2 &= 3_2(6_1)3_1(6_1)3_2(6_2) \\
 &\quad 3_3(6_2)3_3(6_2)3_3(6_2) \\
 3_1(6_2)3_2(6_1)3_2(6_2)3_3(6_2)3_2(6_1)3_2(6_2) &= 3_1(6_2)3_1(6_1)3_2(6_1) \\
 &\quad 3_3(6_2)3_3(6_1)3_2(6_1) \\
 3_1(6_2)3_2(6_2)3_1(6_1)3_3(6_1)3_3(6_1)3_3(6_1) &= 3_2(6_1)3_1(6_1)3_2(6_2) \\
 &\quad 3_4(6_2)3_4(6_2)3_4(6_2) \\
 3_1(6_1)3_1(6_2)3_2(6_2)3_2(6_2)3_1(6_1)3_1(\epsilon_2) &= 3_1(6_1)3_1(6_1)3_2(6_2) \\
 &\quad 3_2(6_1)3_2(6_2)3_2(6_1)
 \end{aligned}$$

Koordinations- kurzsymbol	F.-K. KZ	Ebenengruppe	Nummer im Bildteil
------------------------------	-------------	--------------	-----------------------

$6_2^6 6_1^6$	6	p6mm, p6, p31m, c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	482
$6_2^6 6_1^2$	6	p6mm, p6, p31m, p3m1, p3	483
$6_2^6 6_1^1$	6	p6	484
$6_2^4 6_1^2$	6	c2mm, p2mg, p2gg, p2, cm	485
$6_2^4 6_1^4$	6	c2mm, p2mm, p2mg, p2gg, p2, pm, pg, p1	486
$6_2^2 6_1^2$	6	p2mg, p2gg, p2, pg	487
$6_2^4 6_1^4$	6	p2mg, p2gg, p2, pg	488

8) Häufigkeitsverteilungen hinsichtlich der Koordinationsmöglichkeiten

Man betrachte eine Fläche einer heterogenen Ebenenzerlegung mit zwei verschiedenen Flächenarten. Als zu dieser Fläche - oder zu einem ihr zugeordneten Punkt in ihrem Inneren - gehörende Koordinationszahl kann man - wie schon erwähnt - die Anzahl aller mit Kanten an sie grenzenden Flächen überhaupt betrachten oder aber auch die Anzahl so angrenzender Flächen der anderen Art. Alle Koordinationsmöglichkeiten gehen selbstverständlich aus der Tabelle der Zerlegungen unmittelbar hervor, doch sollen der einfacheren Übersicht halber die möglichen Koordinationsverhältnisse und die Anzahl sie realisierender Ebenenzerlegungen in den Abbildungen 26, 27 und 28 noch einmal graphisch dargestellt werden. - Die in diesen Abbildungen gestrichelt gezeichneten Strecken haben selbstverständlich nur den Sinn, die Änderungen in den Anzahlen der jeweils vorkommenden Zerlegungen augenfälliger darzustellen.

In Abb. 26 wird als Koordinationszahl die Anzahl der eine Fläche umgebenden Flächen der anderen Art angegeben, in Abb. 27 das Verhältnis der Anzahlen der eine Fläche umgebenden Flächen der jeweils anderen Art - und in Abb. 28 schließlich $(m+n)/2$, wobei m und n die Eckenzahlen der an der Zerlegung beteiligten Polygone bedeuten.⁺

Selbstverständlich gelten die in den Abbildungen 26 bis 28 wiedergegebenen Häufigkeitsverteilungen nur für den von uns behandelten Fall der Ebenenzerlegung und können in einem Fall, der aus dem unseren durch Einführung einschränkender Bedingungen hervorgeht, durchaus anders sein; in keinem derartigen Fall aber können Koordinationen auftreten, die nicht auch schon von uns erfaßt sind, so daß also in jedem Fall die Abbildungen 26 bis 28 angeben, welche Koordinationen höchstens auftreten können.

⁺ In Abb. 28 wird - wie in der Tabelle - $(m + n)/2$ mit F.-K. KZ bezeichnet.

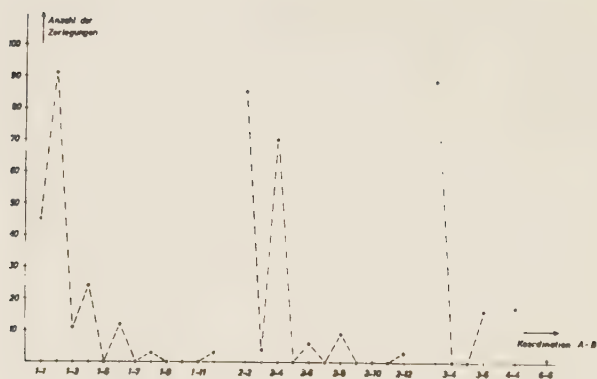


Abb. 26 (zur Bezeichnung siehe S. 97)

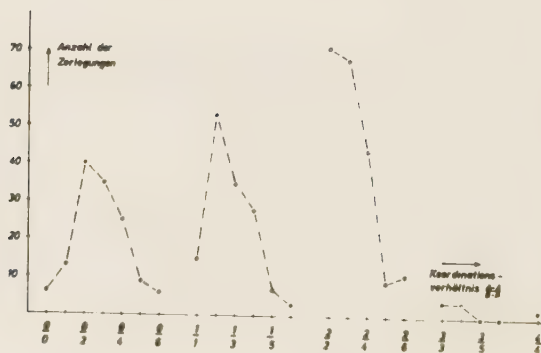


Abb. 27 (zur Bezeichnung siehe S. 97)

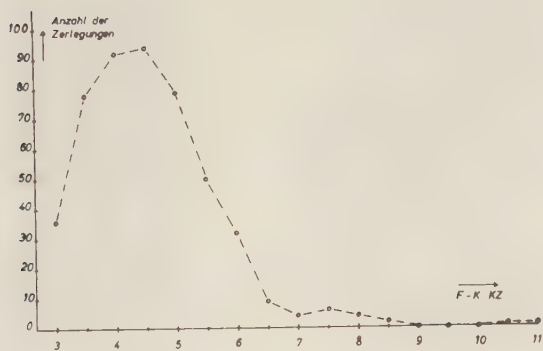
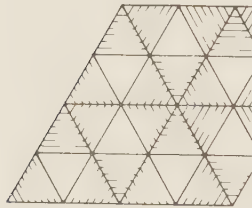


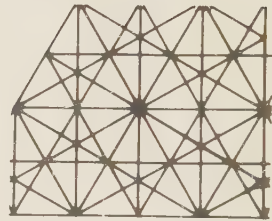
Abb. 28 (zur Bezeichnung siehe S. 97)

9) Bildteil

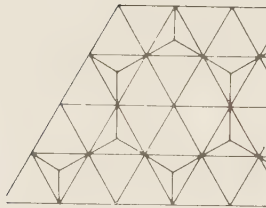
Die Zahlen unter den Bildern verweisen auf die Tabelle (siehe IV7).



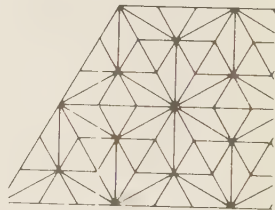
1



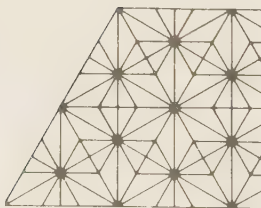
2



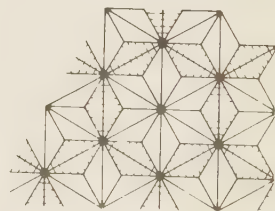
3



4



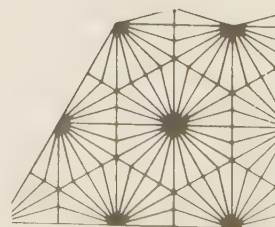
5



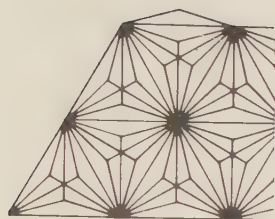
6



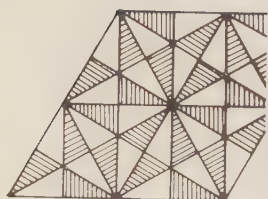
7



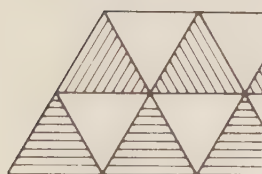
8



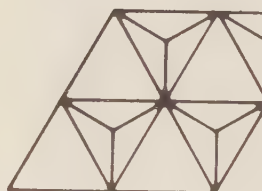
9



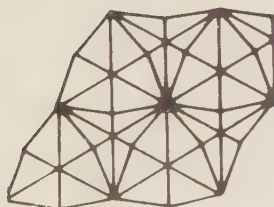
10



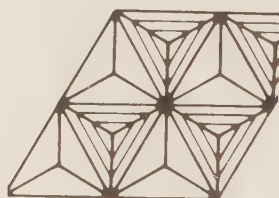
11



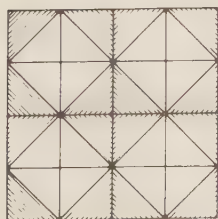
12



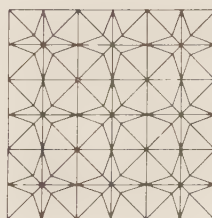
13



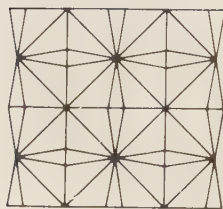
14



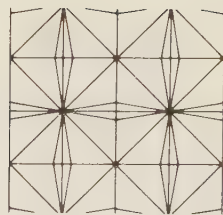
15



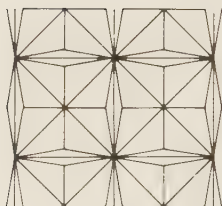
16



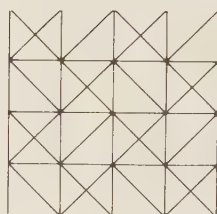
17



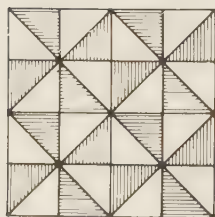
18



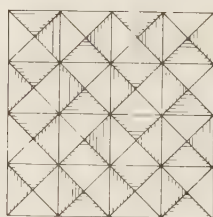
19



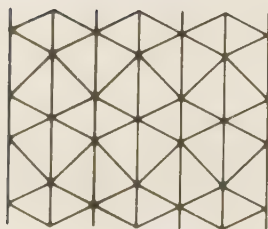
20



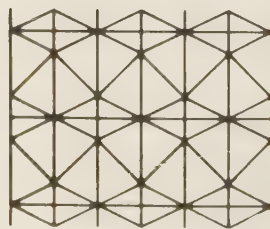
21



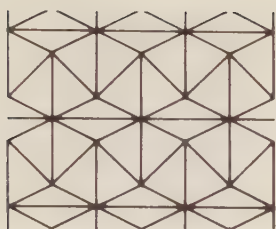
22



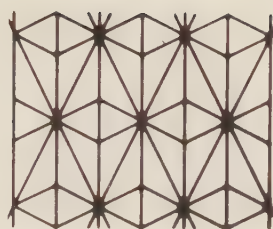
23



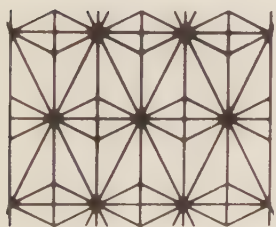
24



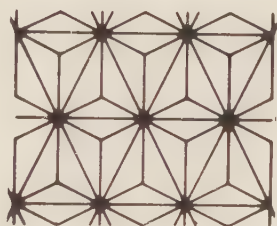
25



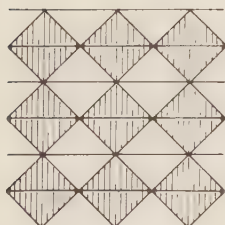
26



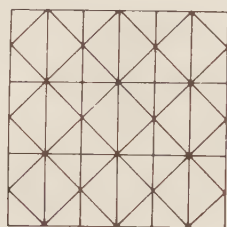
27



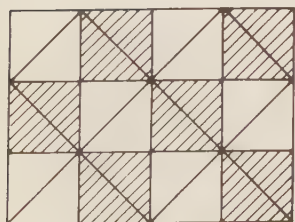
28



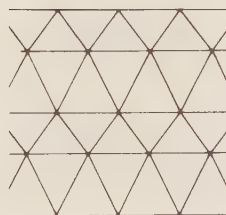
29



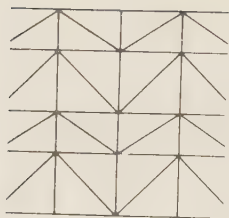
30



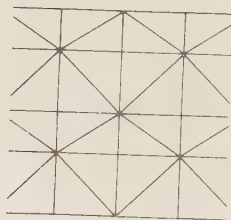
31



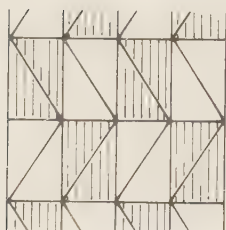
32



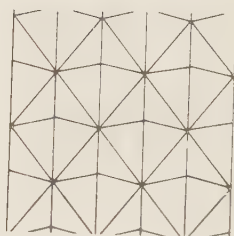
33



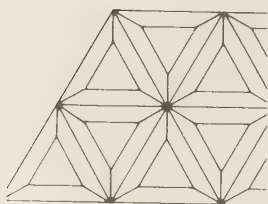
34



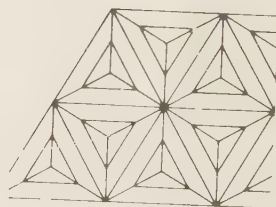
35



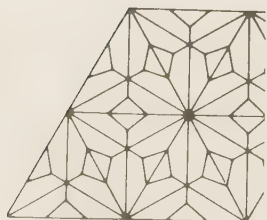
36



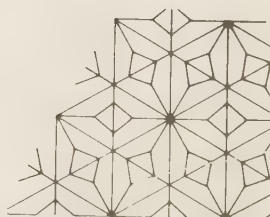
37



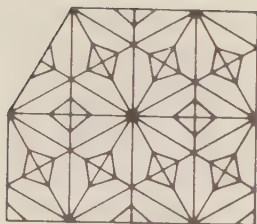
38



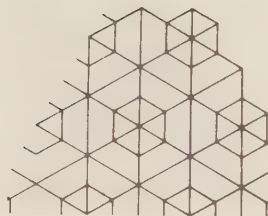
39



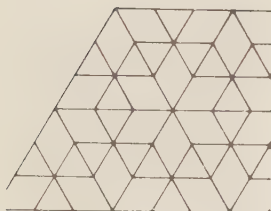
40



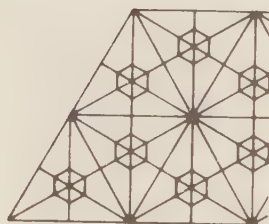
41



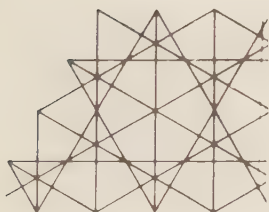
42



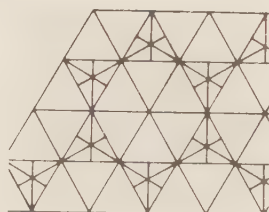
43



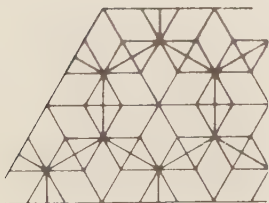
44



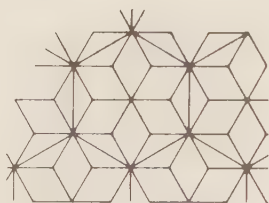
45



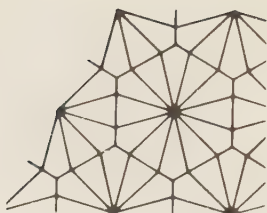
46



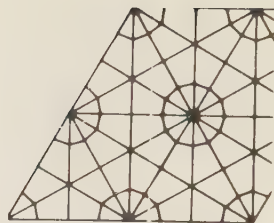
47



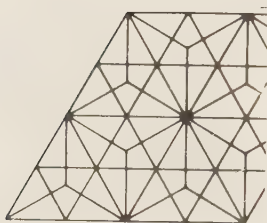
48



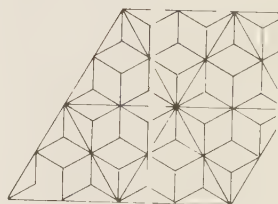
49



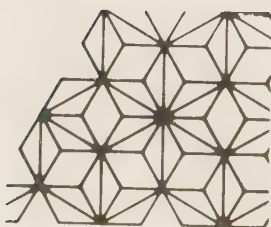
50



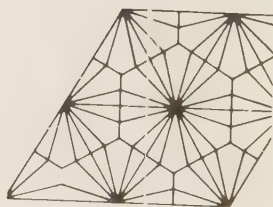
51



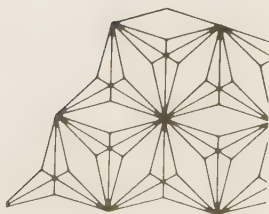
52



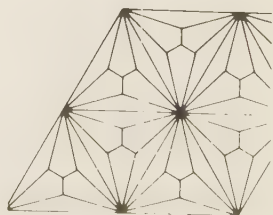
53



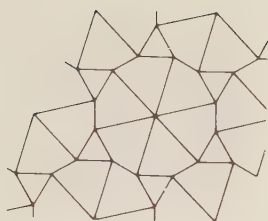
54



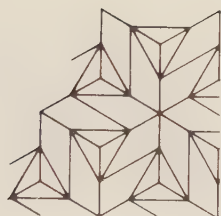
55



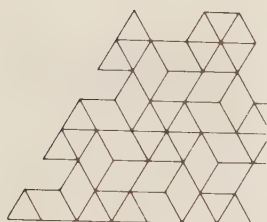
56



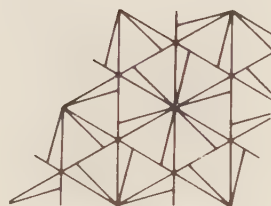
57



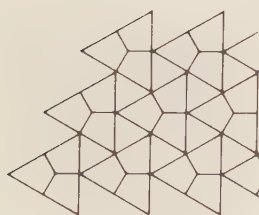
58



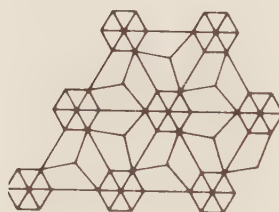
59



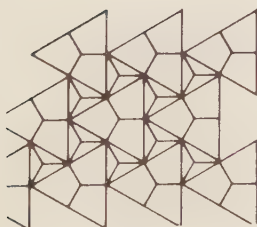
60



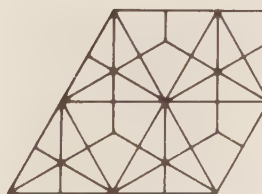
61



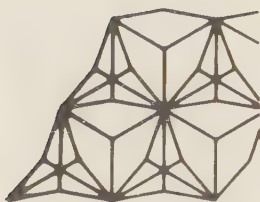
62



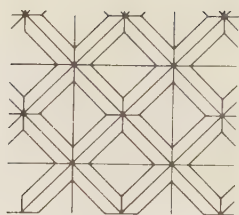
63



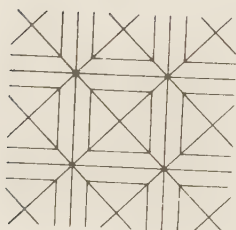
64



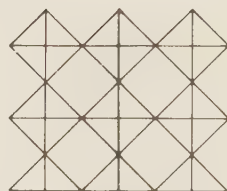
65



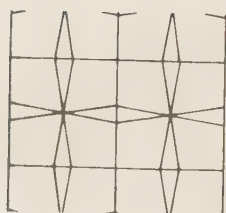
66



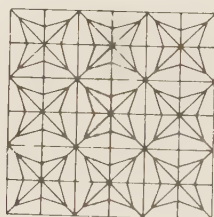
67



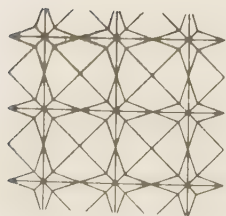
68



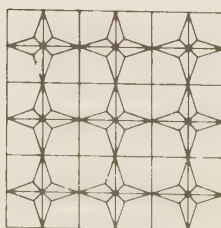
69



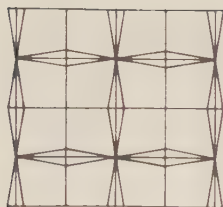
70



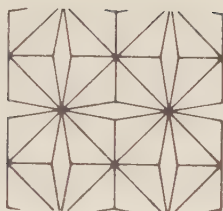
71



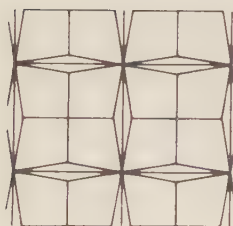
72



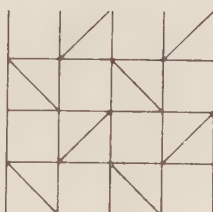
73



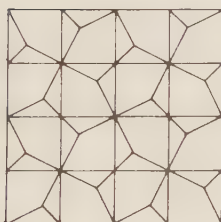
74



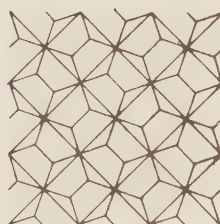
75



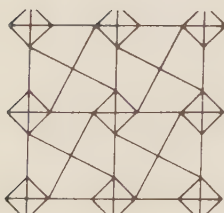
76



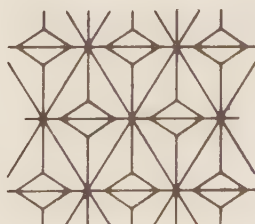
77



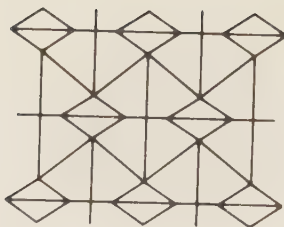
78



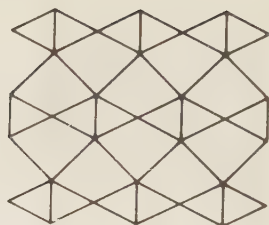
79



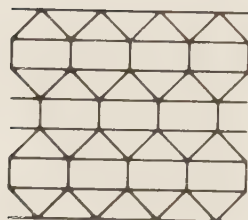
80



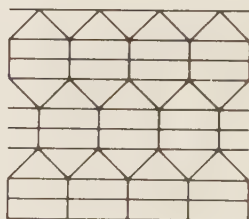
81



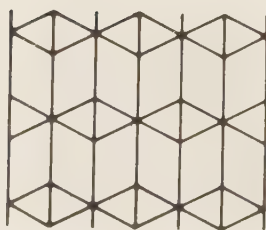
82



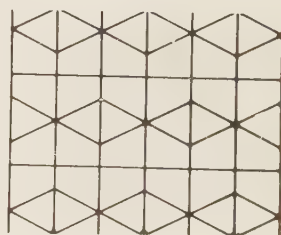
83



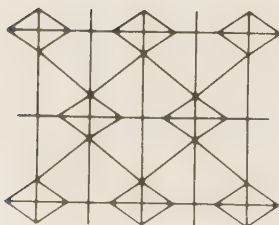
84



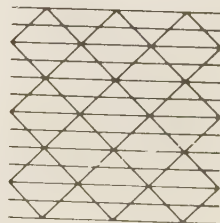
85



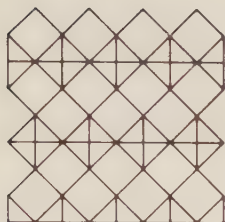
86



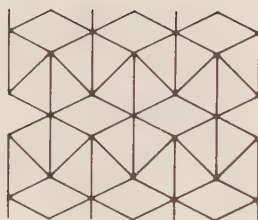
87



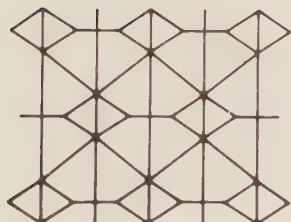
88



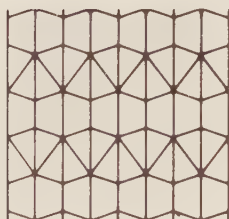
89



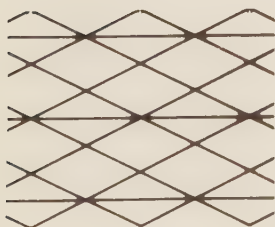
90



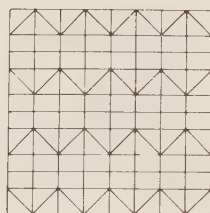
91



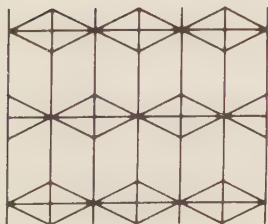
92



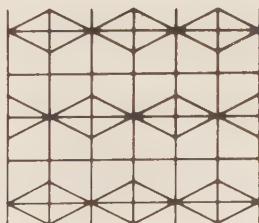
93



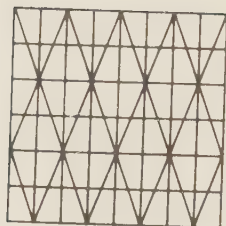
94



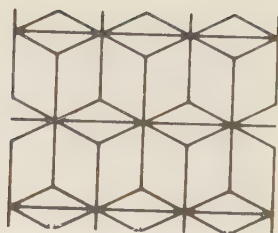
95



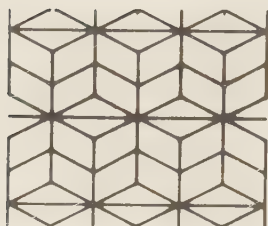
96



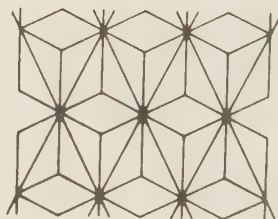
97



98



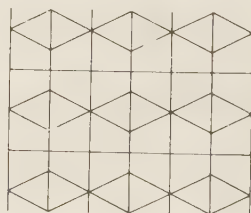
99



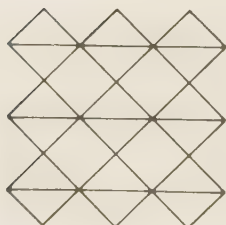
100



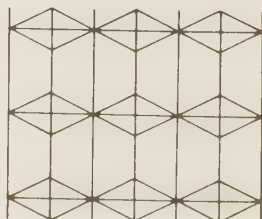
101



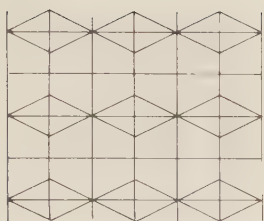
102



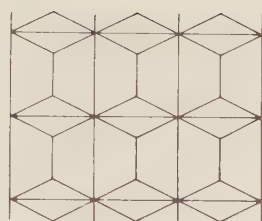
103



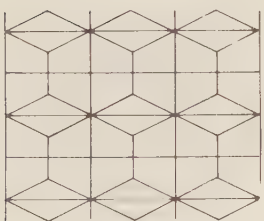
104



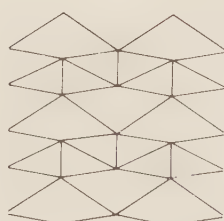
105



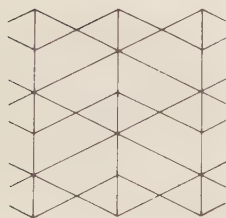
106



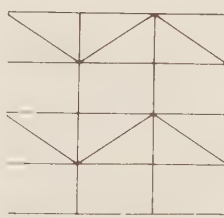
107



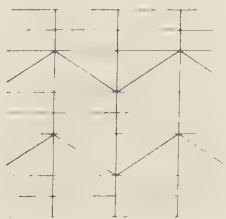
108



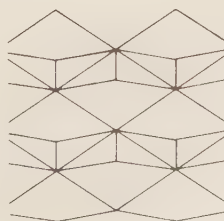
109



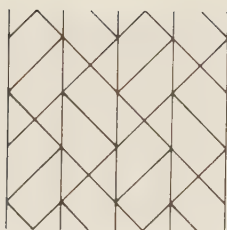
110



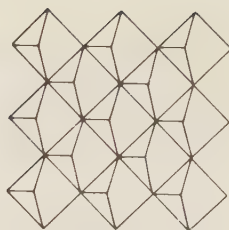
111



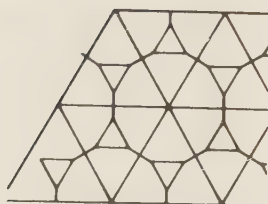
112



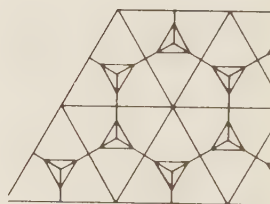
113



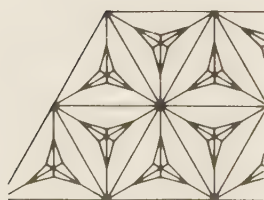
114



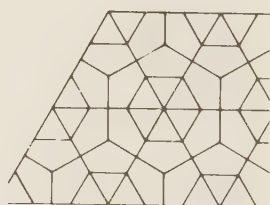
115



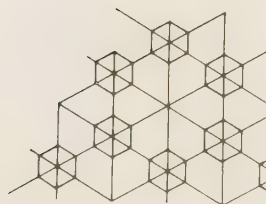
116



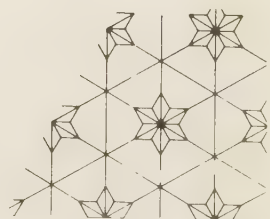
117



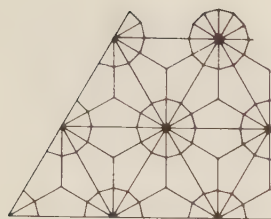
118



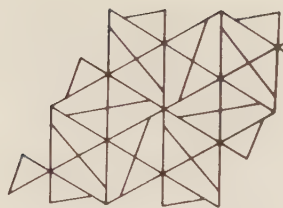
119



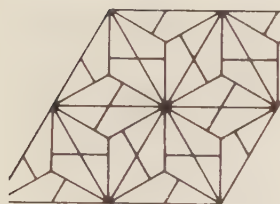
120



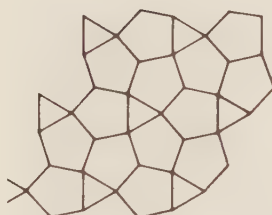
121



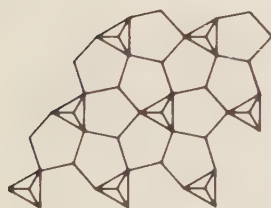
122



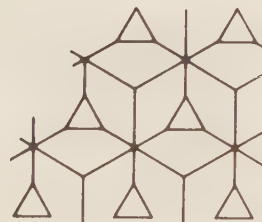
123



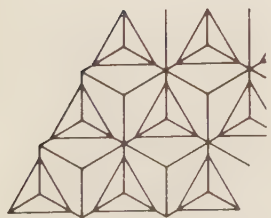
124



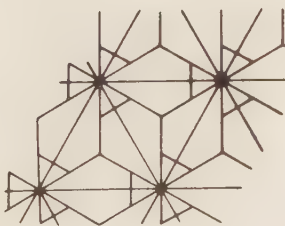
125



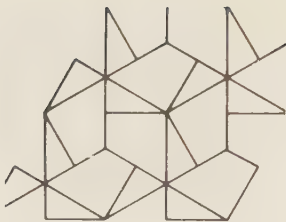
126



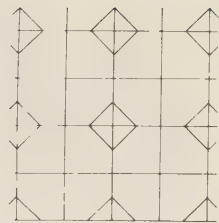
127



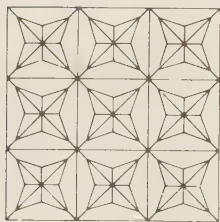
128



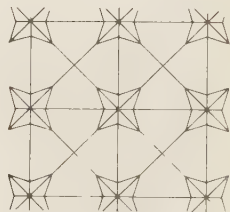
129



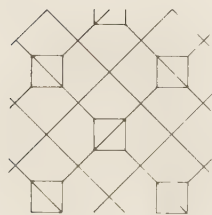
130



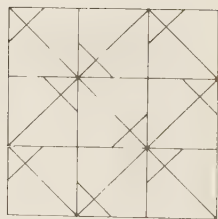
131



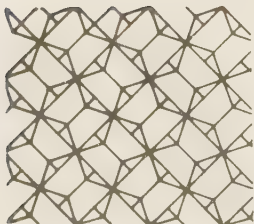
132



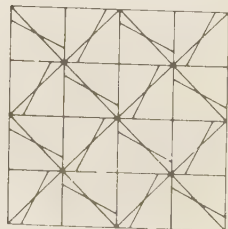
133



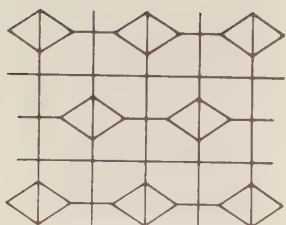
134



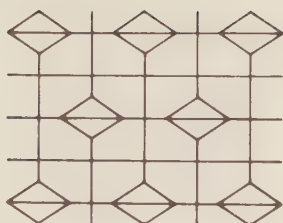
135



136



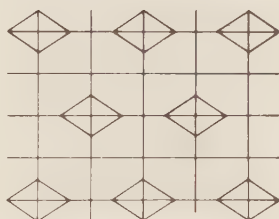
137



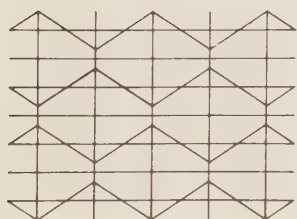
138



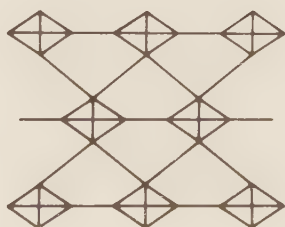
139



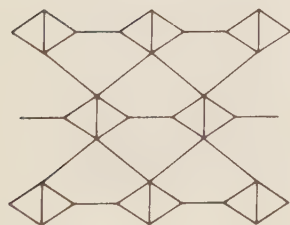
140



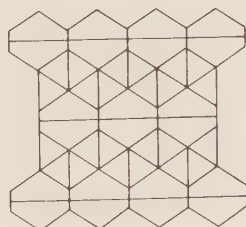
141



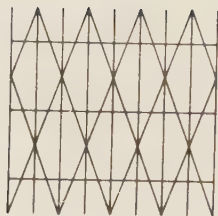
142



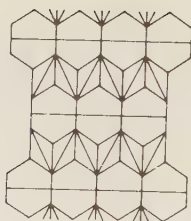
143



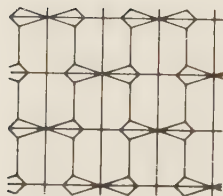
144



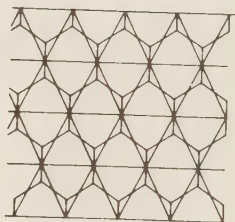
145



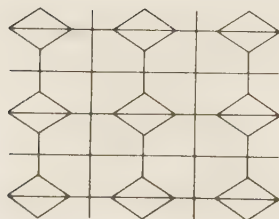
146



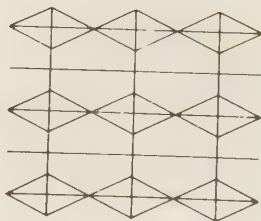
147



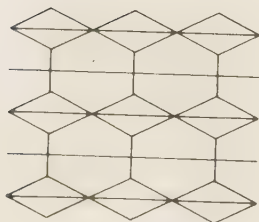
148



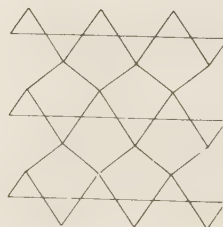
149



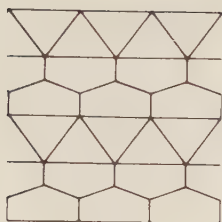
150



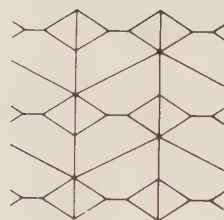
151



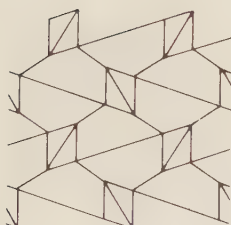
152



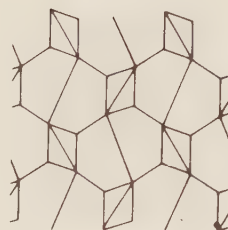
153



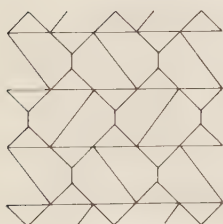
154



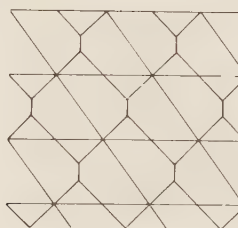
155



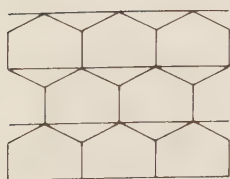
156



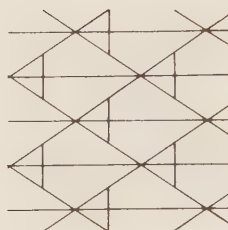
157



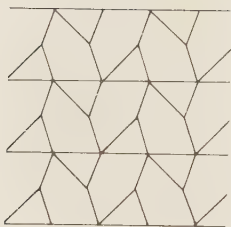
158



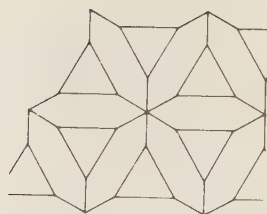
159



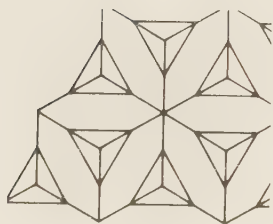
160



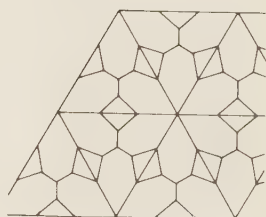
161



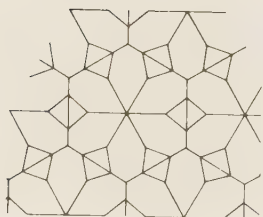
162



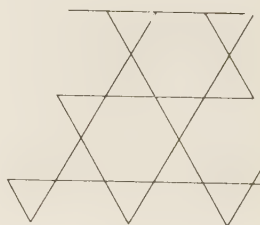
163



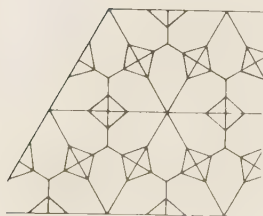
164



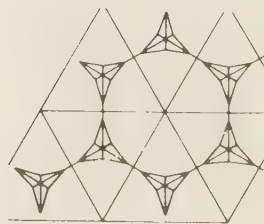
165



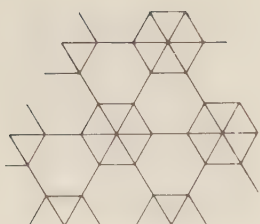
166



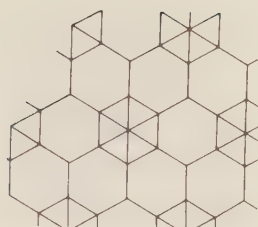
167



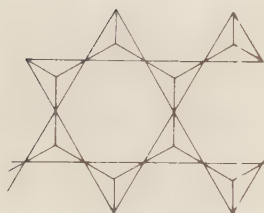
168



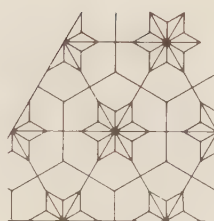
169



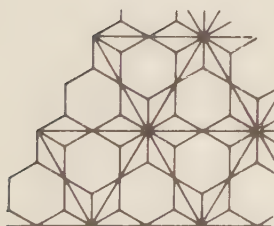
170



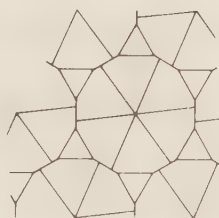
171



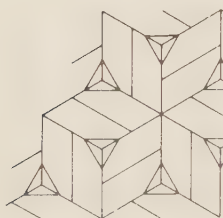
172



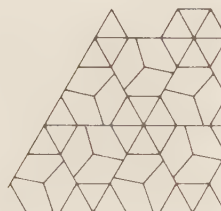
173



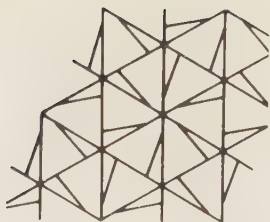
174



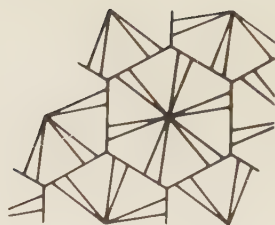
175



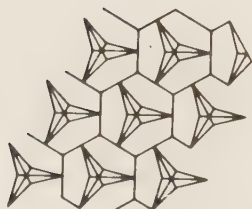
176



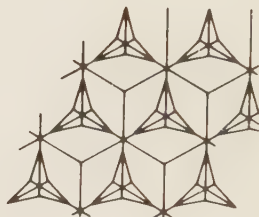
177



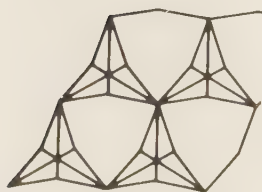
178



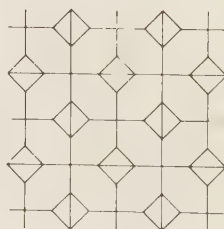
179



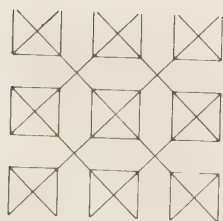
180



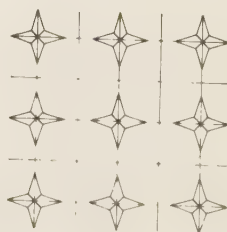
181



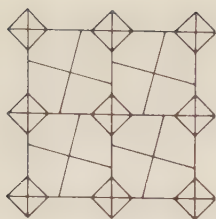
182



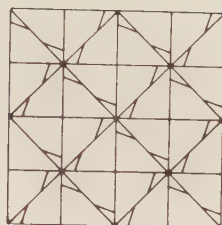
183



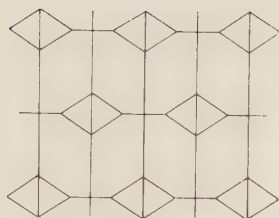
184



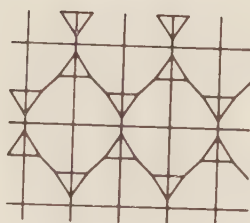
185



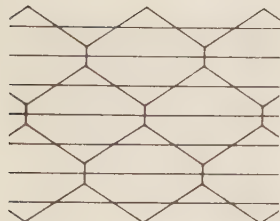
186



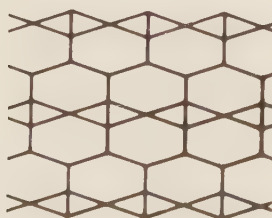
187



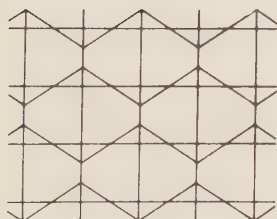
188



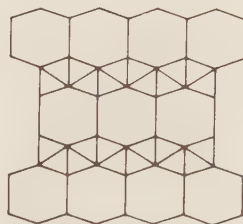
189



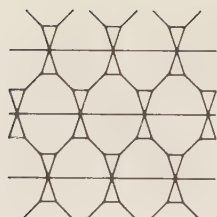
190



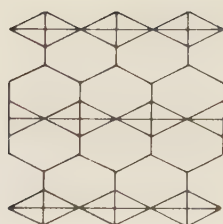
191



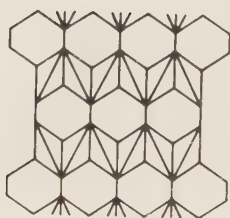
192



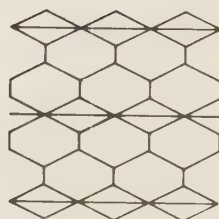
193



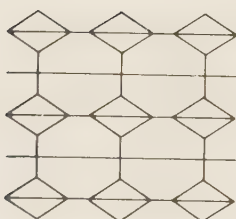
194



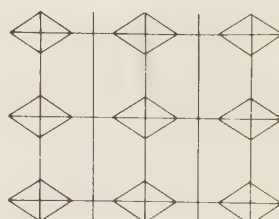
195



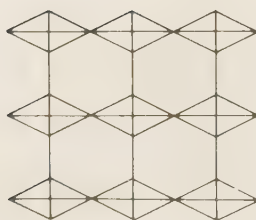
196



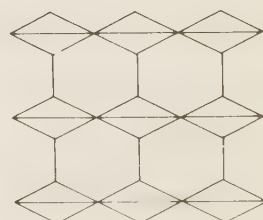
197



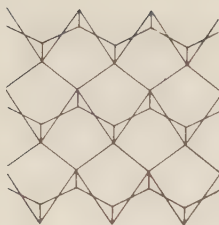
198



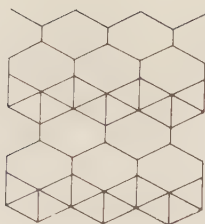
199



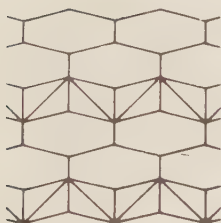
200



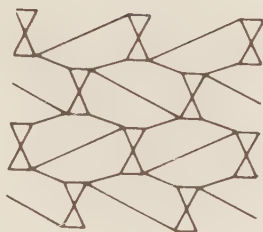
201



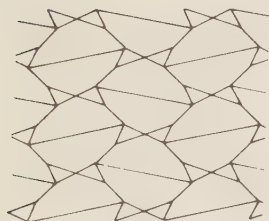
202



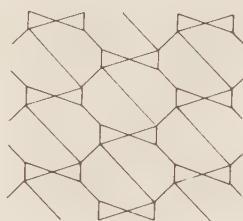
203



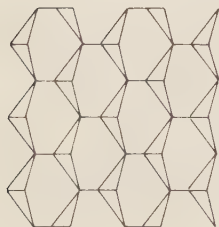
204



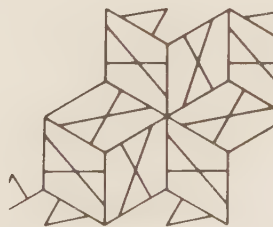
205



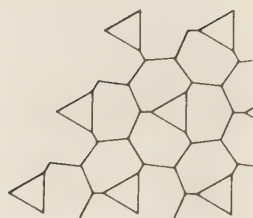
206



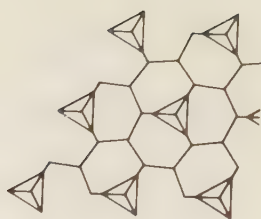
207



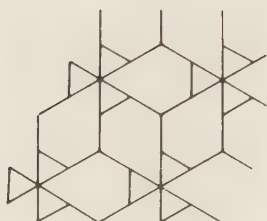
208



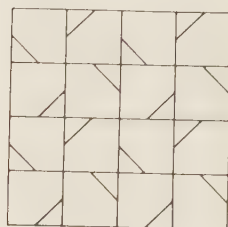
209



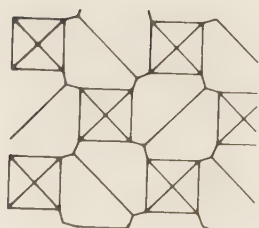
210



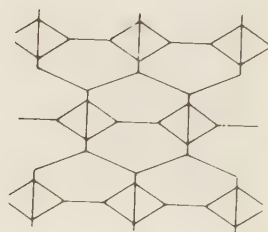
211



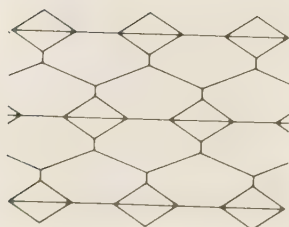
212



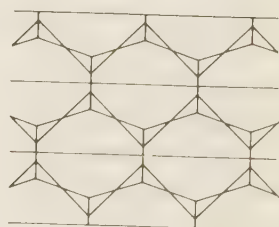
213



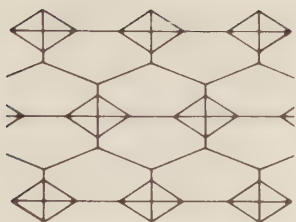
214



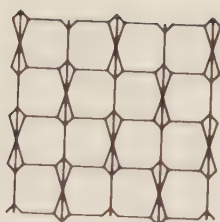
215



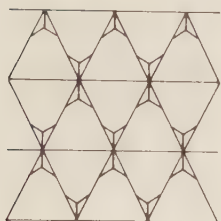
216



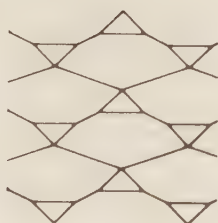
217



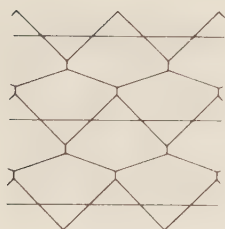
218



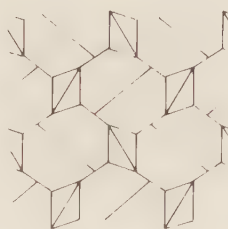
219



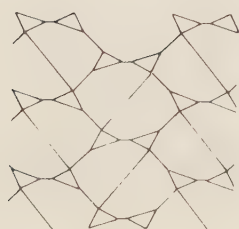
220



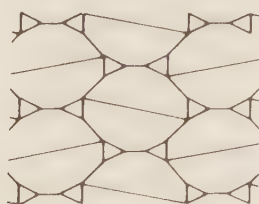
221



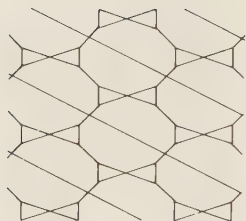
222



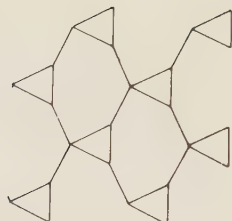
223



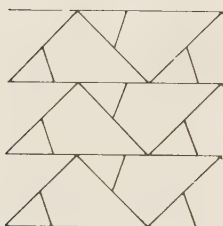
224



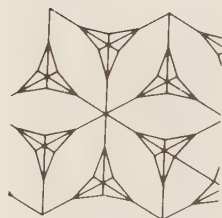
225



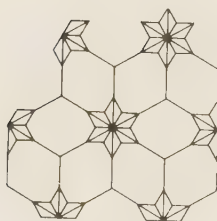
226



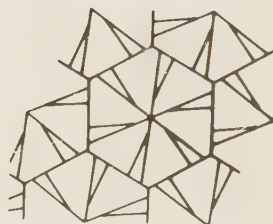
227



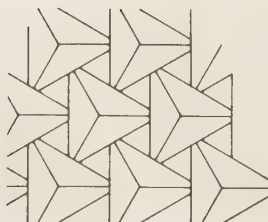
228



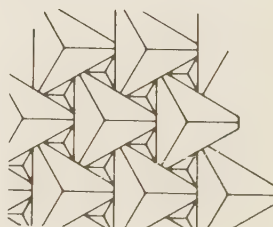
229



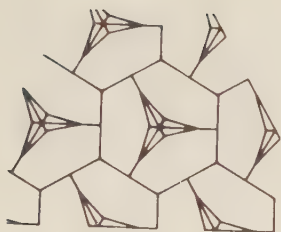
230



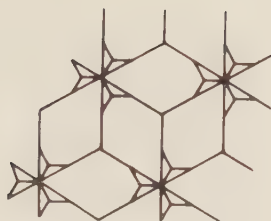
231



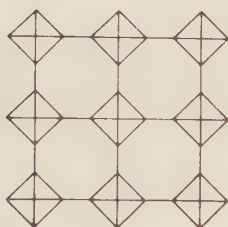
232



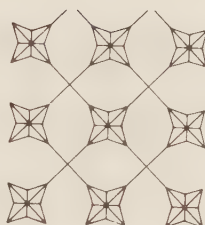
233



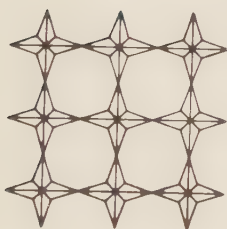
234



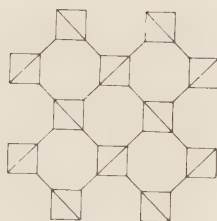
235



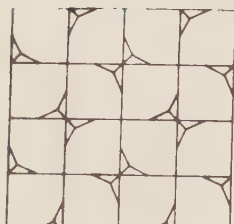
236



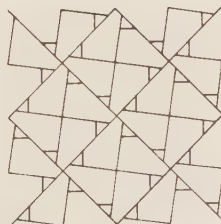
237



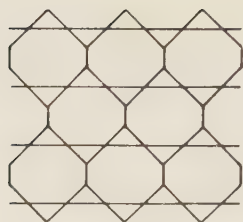
238



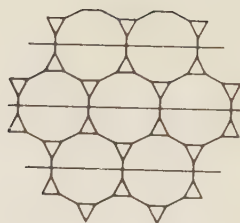
239



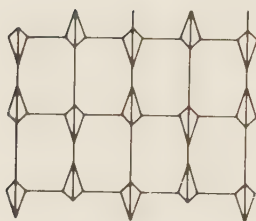
240



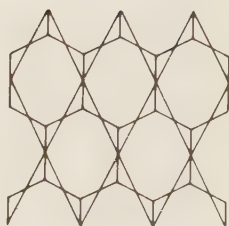
241



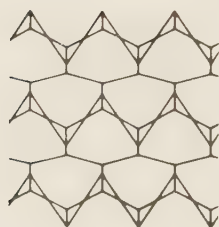
242



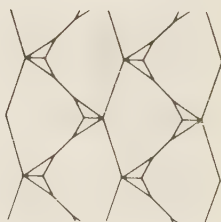
243



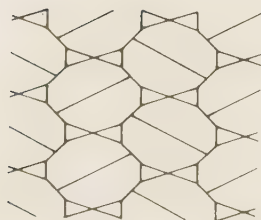
244



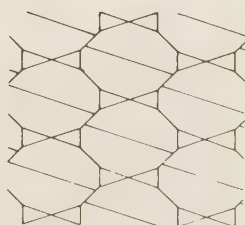
245



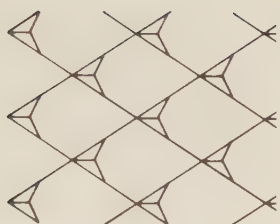
246



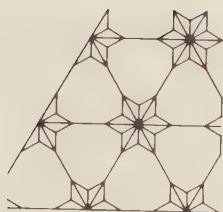
247



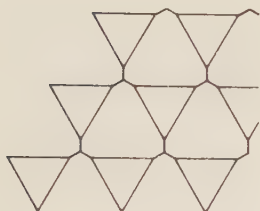
248



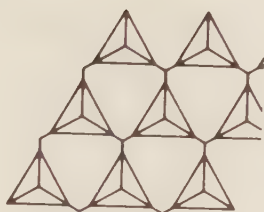
249



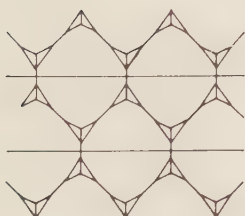
250



251



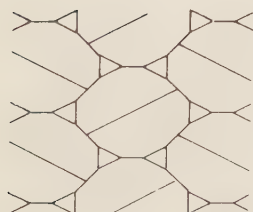
252



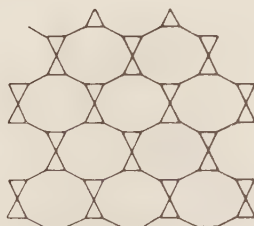
253



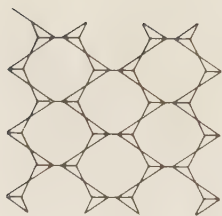
254



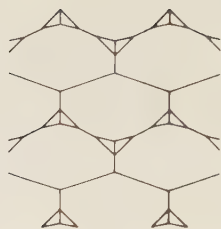
255



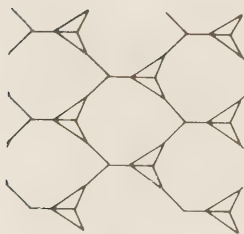
256



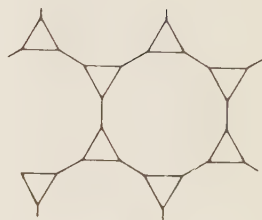
257



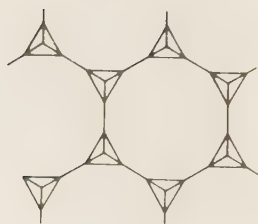
258



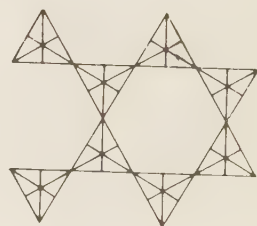
259



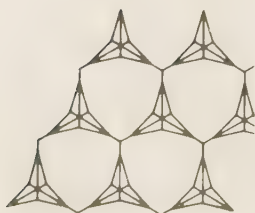
260



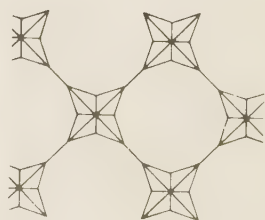
261



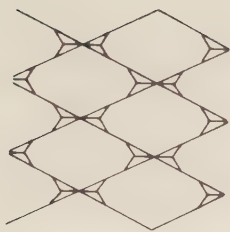
262



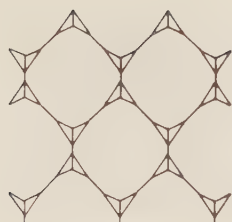
263



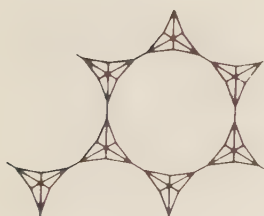
264



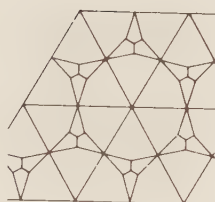
265



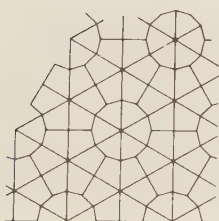
266



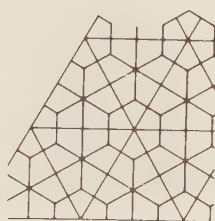
267



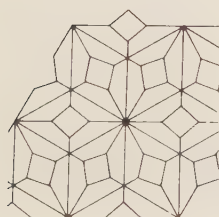
268



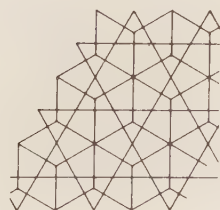
269



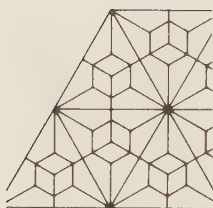
270



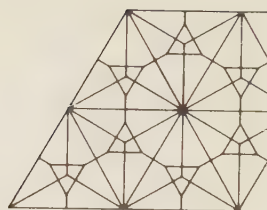
271



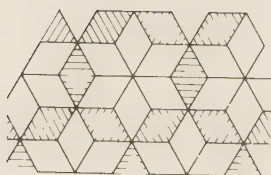
272



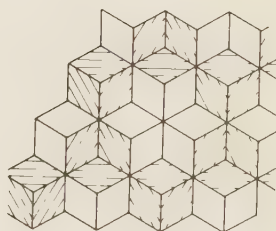
273



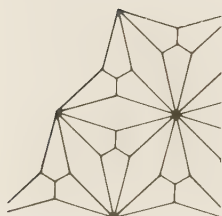
274



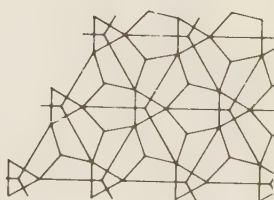
275



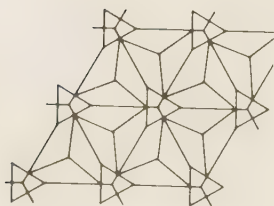
276



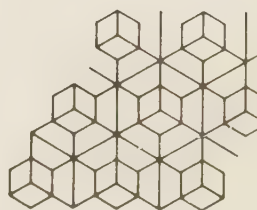
277



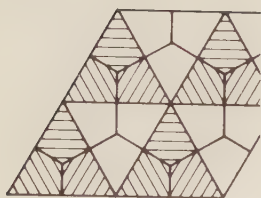
278



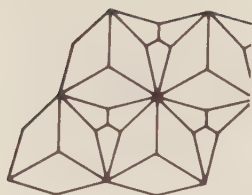
279



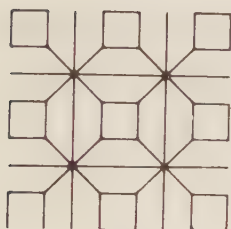
280



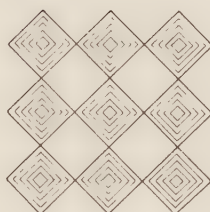
281



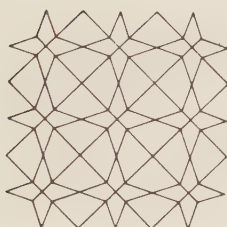
282



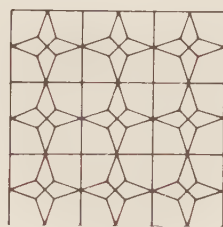
283



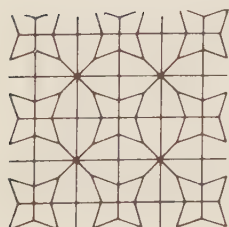
284



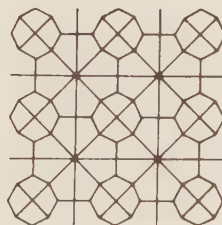
285



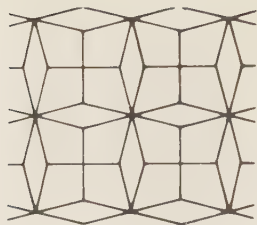
286



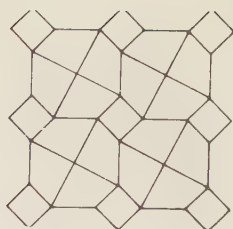
287



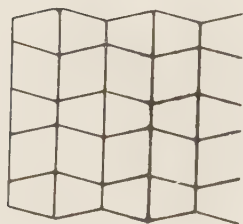
288



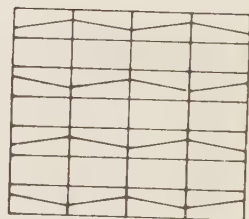
289



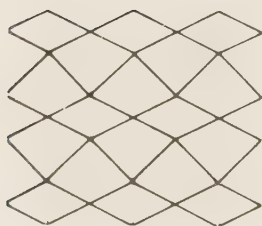
290



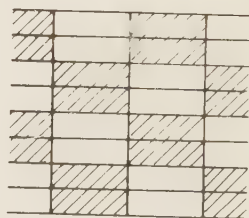
291



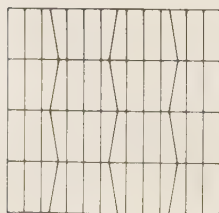
292



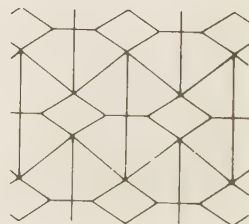
293



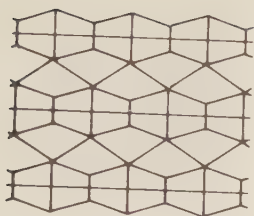
294



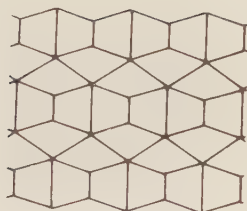
295



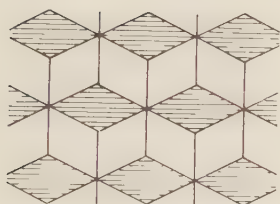
296



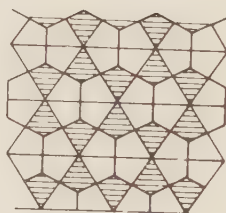
297



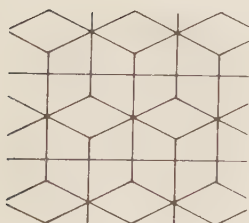
298



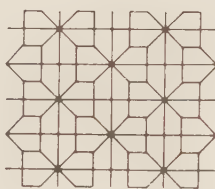
299



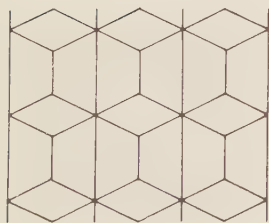
300



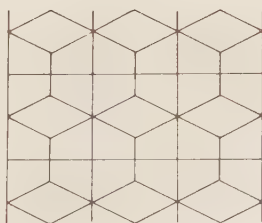
301



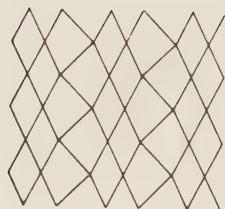
302



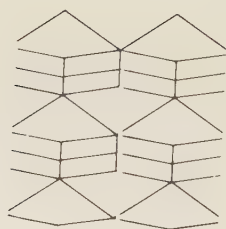
303



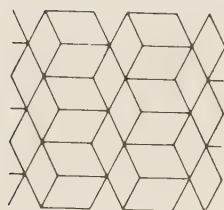
304



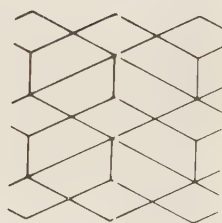
305



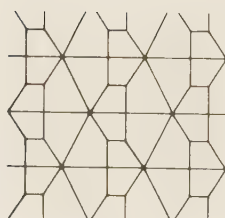
306



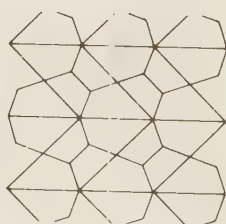
307



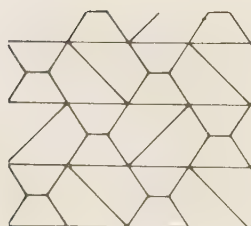
308



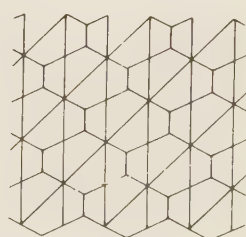
309



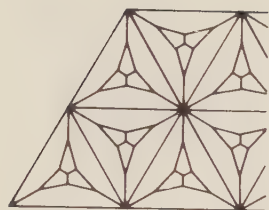
310



311



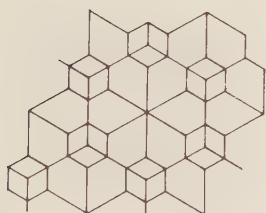
312



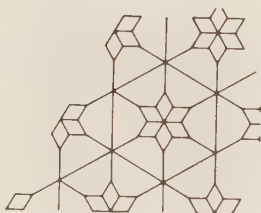
313



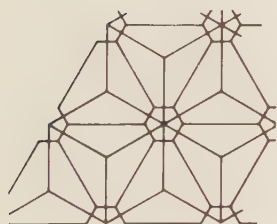
314



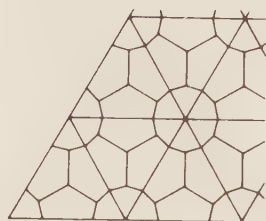
315



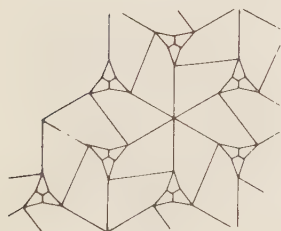
316



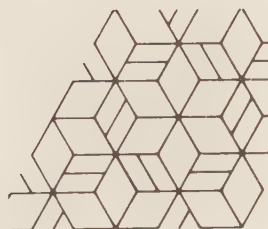
317



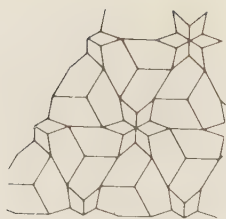
318



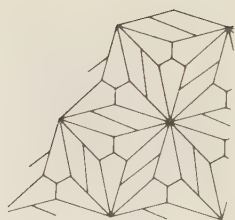
319



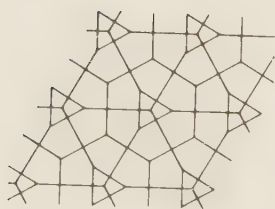
320



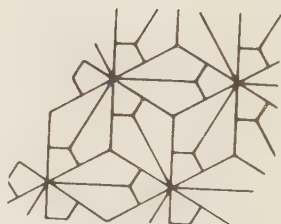
321



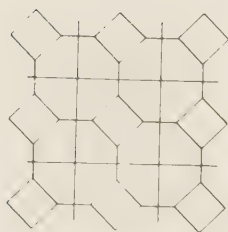
322



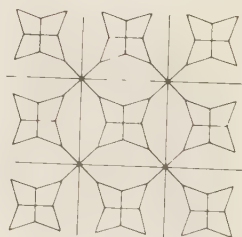
323



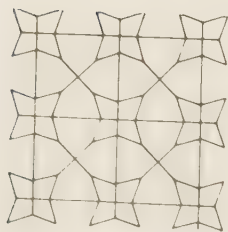
324



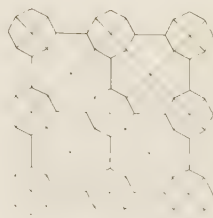
325



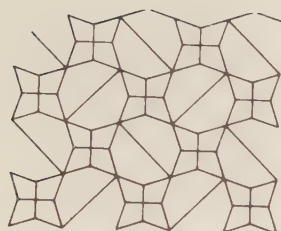
326



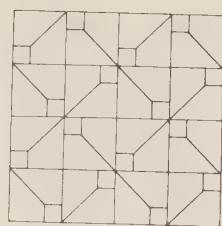
327



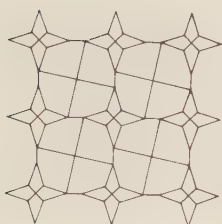
328



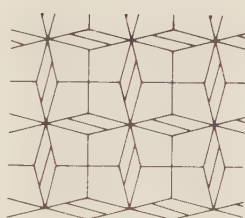
329



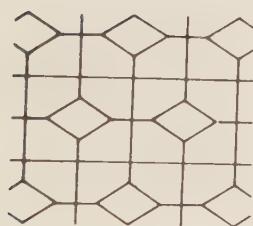
330



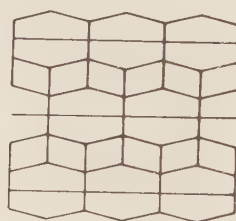
331



332



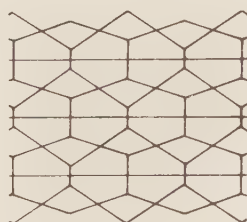
333



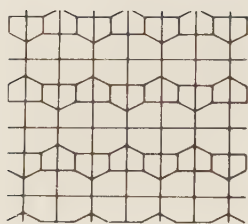
334



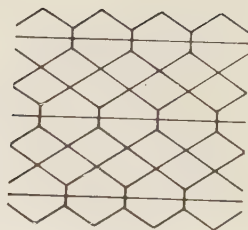
335



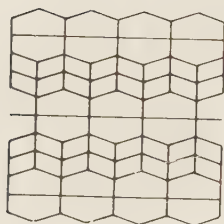
336



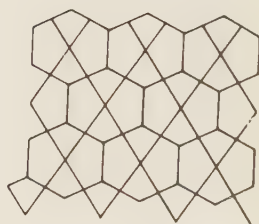
337



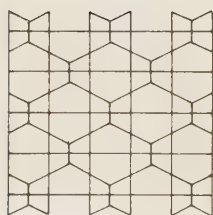
338



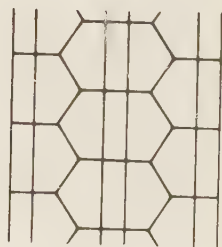
339



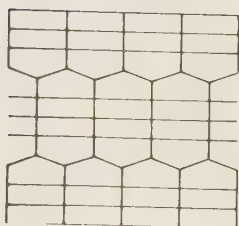
340



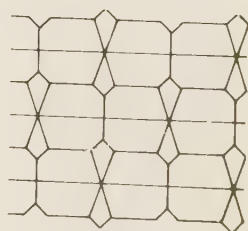
341



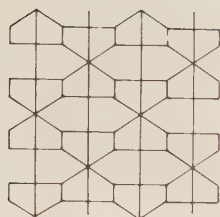
342



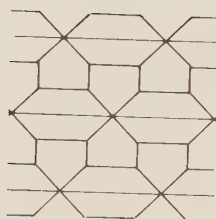
343



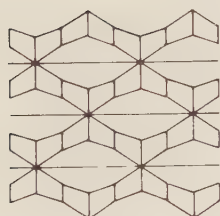
344



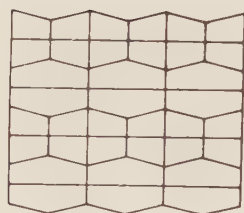
345



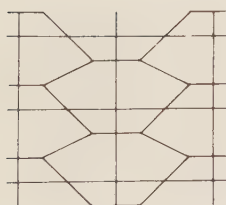
346



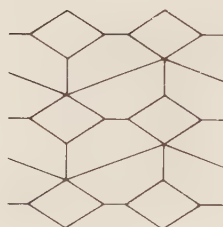
347



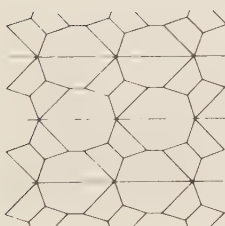
348



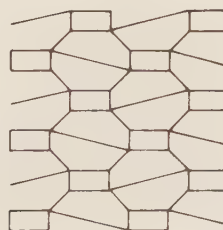
349



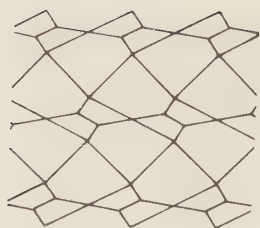
350



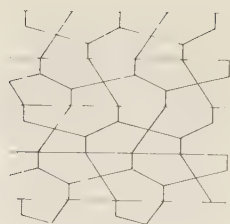
351



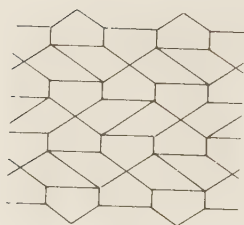
352



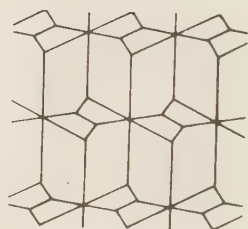
353



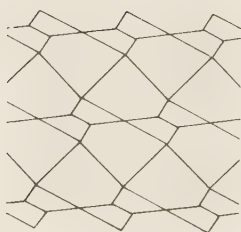
354



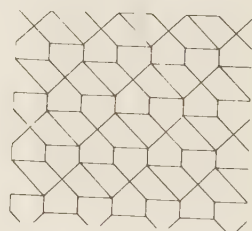
355



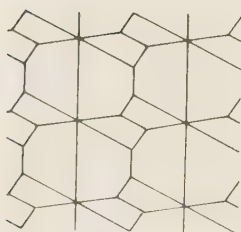
356



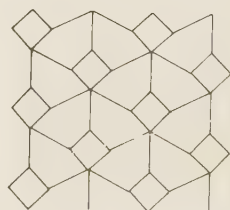
357



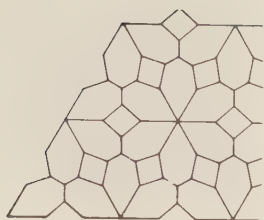
358



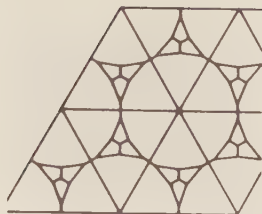
359



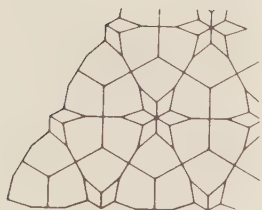
360



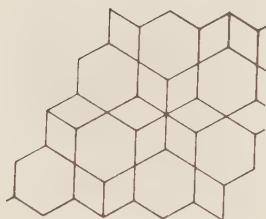
361



362



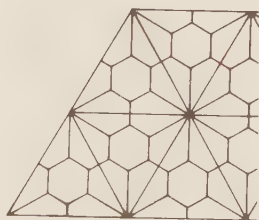
363



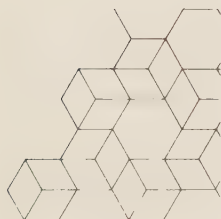
364



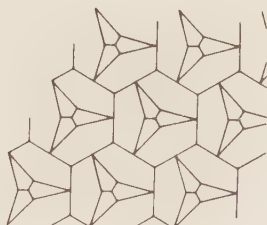
365



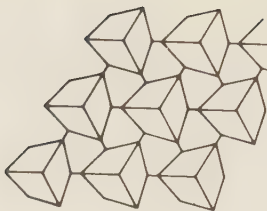
366



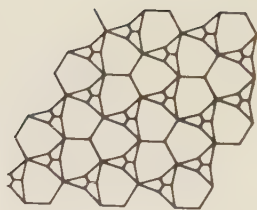
367



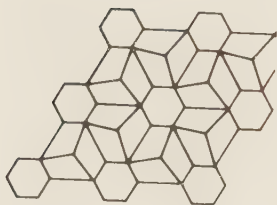
368



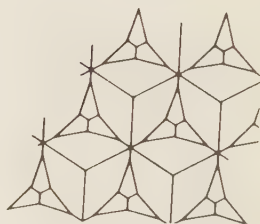
369



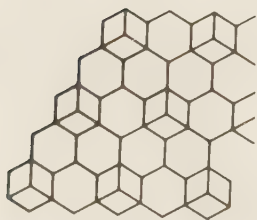
370



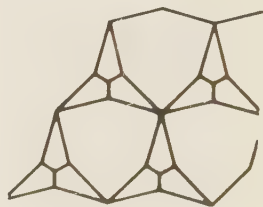
371



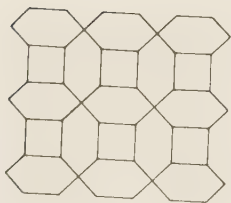
372



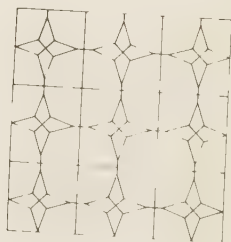
373



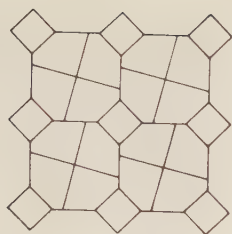
374



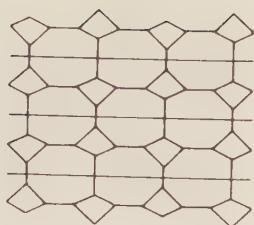
375



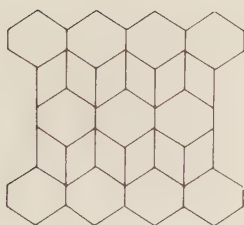
376



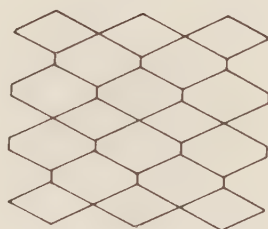
377



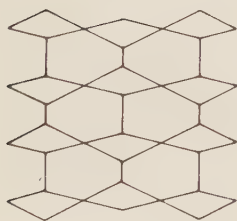
378



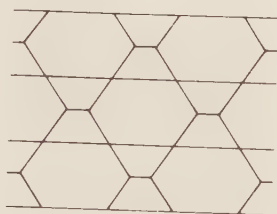
379



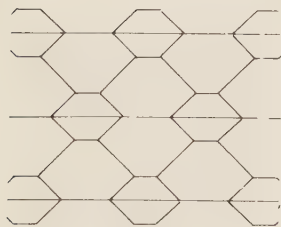
380



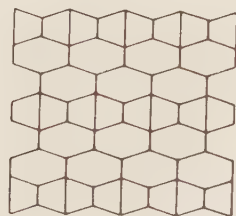
381



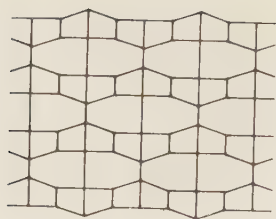
382



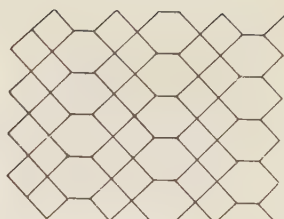
383



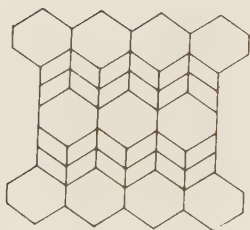
384



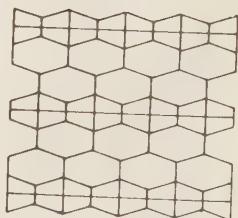
385



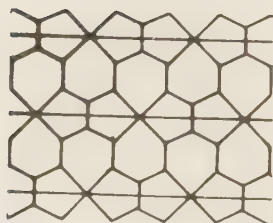
386



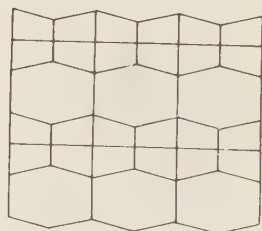
387



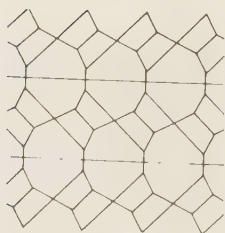
388



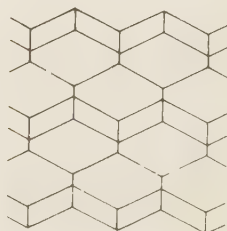
389



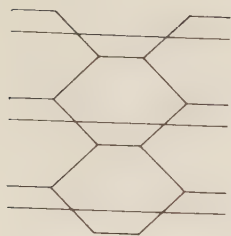
390



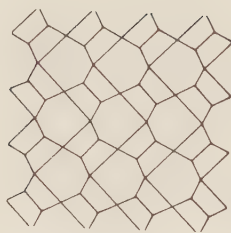
391



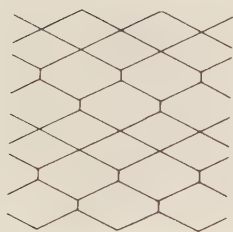
392



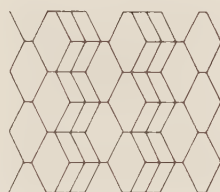
393



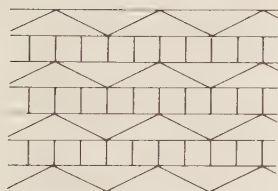
394



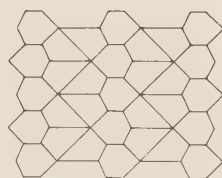
395



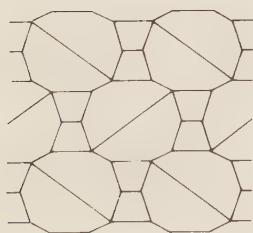
396



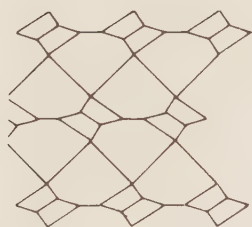
397



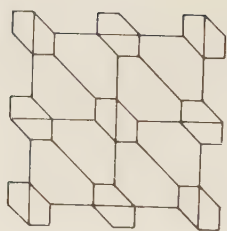
398



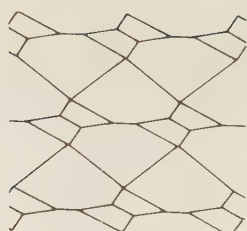
399



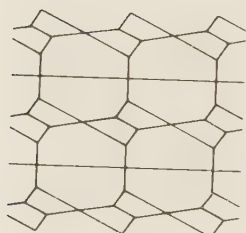
400



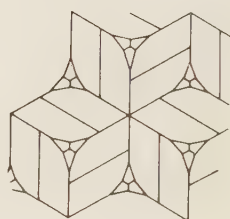
401



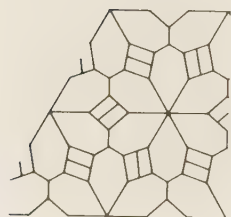
402



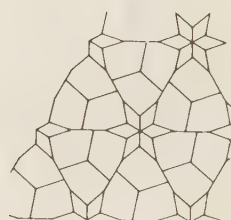
403



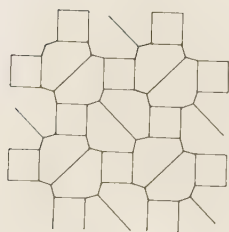
404



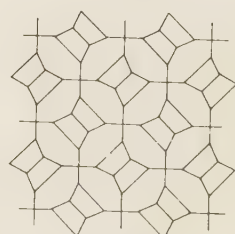
405



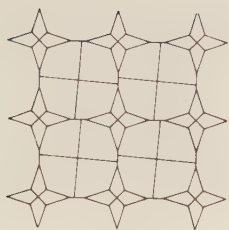
406



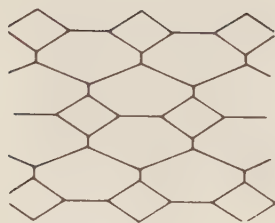
407



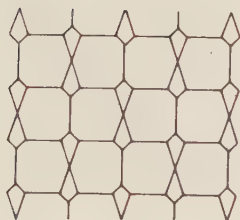
408



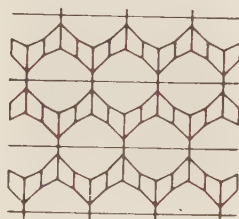
409



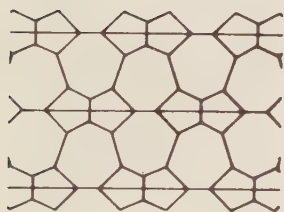
410



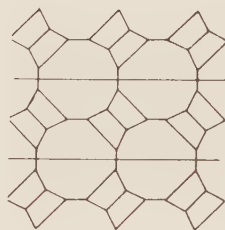
411



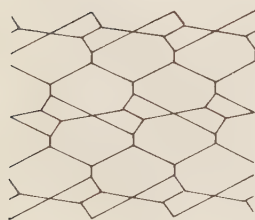
412



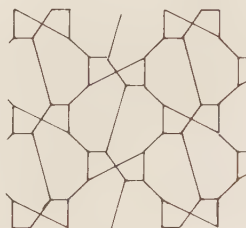
413



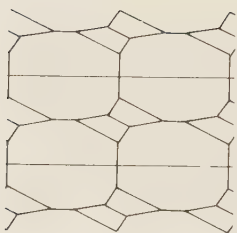
414



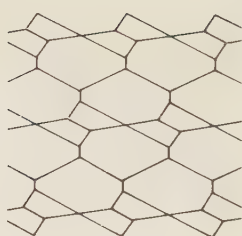
415



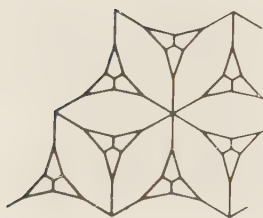
416



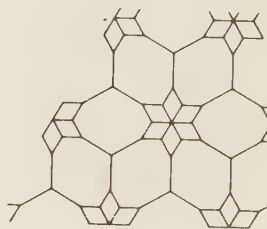
417



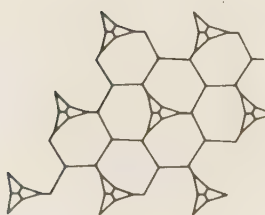
418



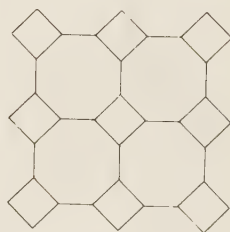
419



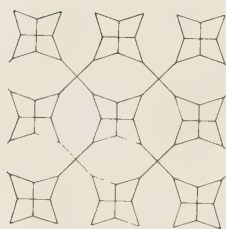
420



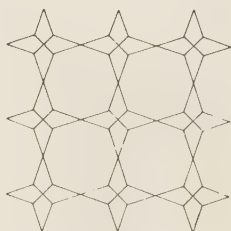
421



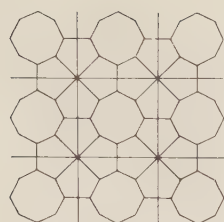
422



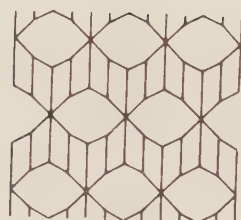
423



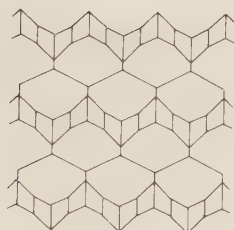
424



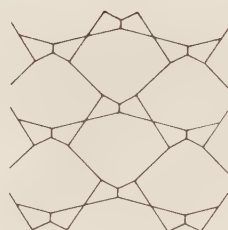
425



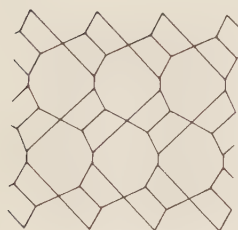
426



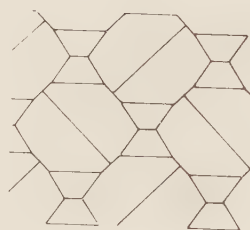
427



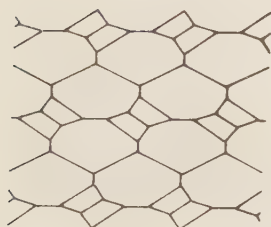
428



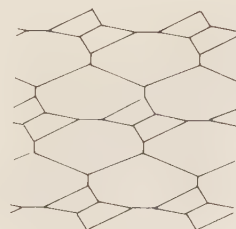
429



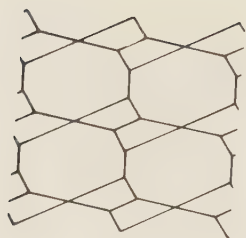
430



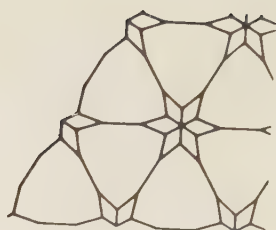
431



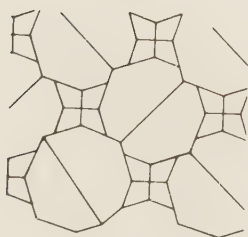
432



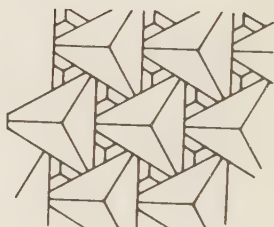
433



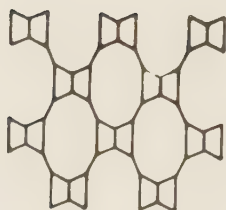
434



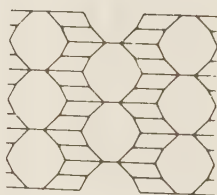
435



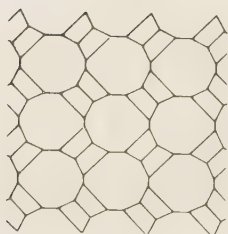
436



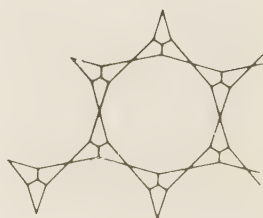
437



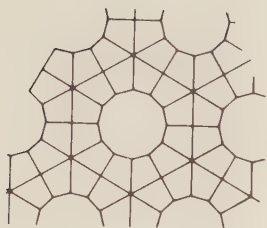
438



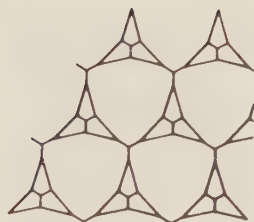
439



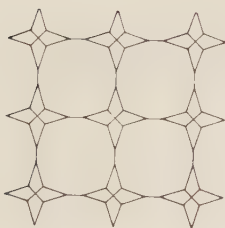
440



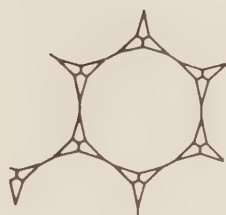
441



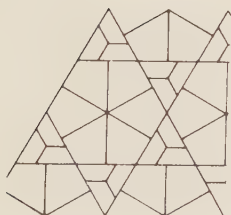
442



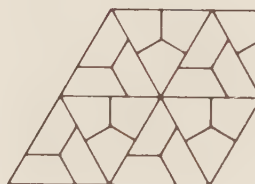
443



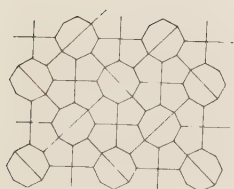
444



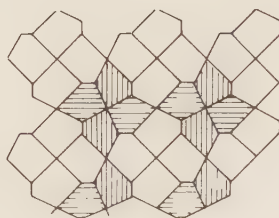
445



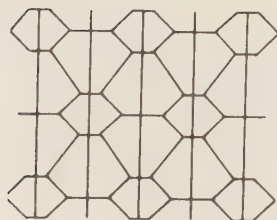
446



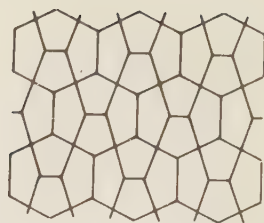
447



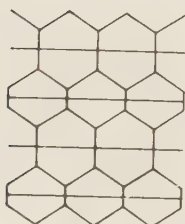
448



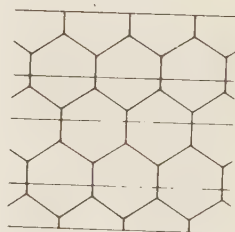
449



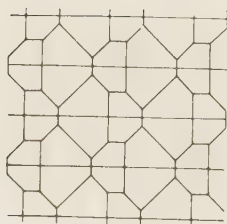
450



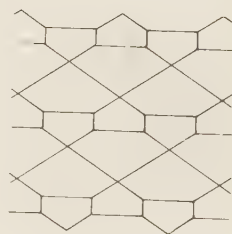
451



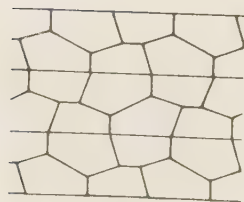
452



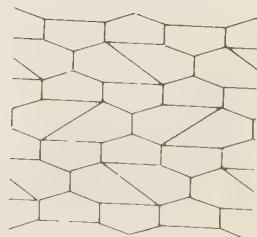
453



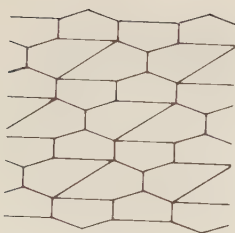
454



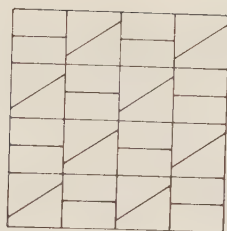
455



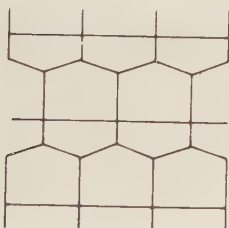
456



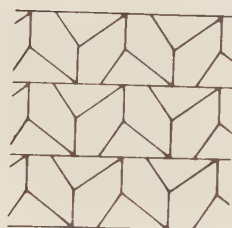
457



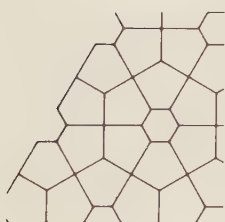
458



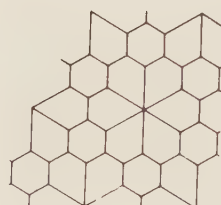
459



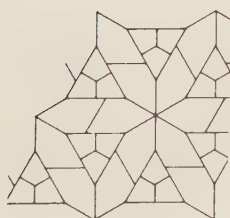
460



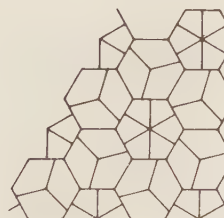
461



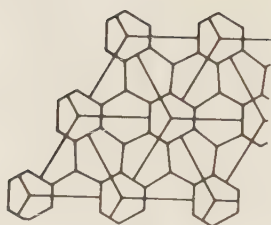
462



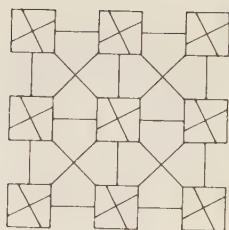
463



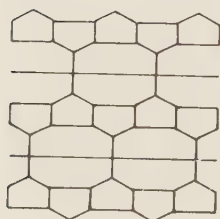
464



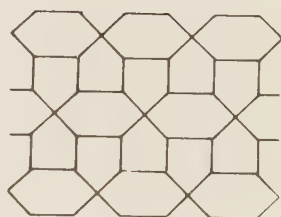
465



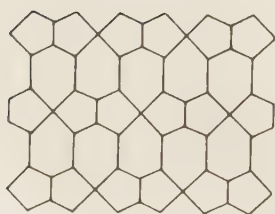
466



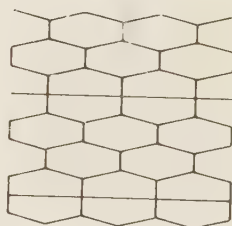
467



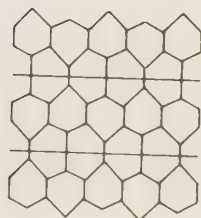
468



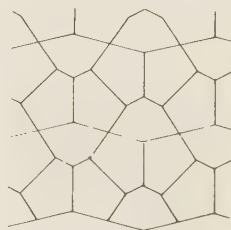
469



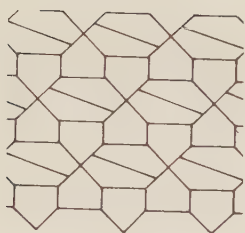
470



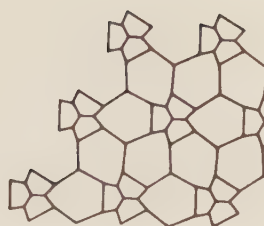
471



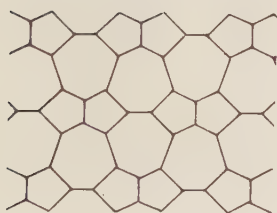
472



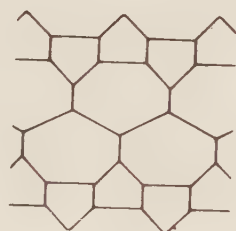
473



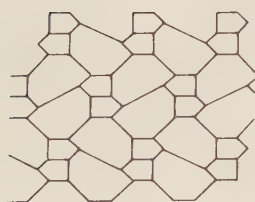
474



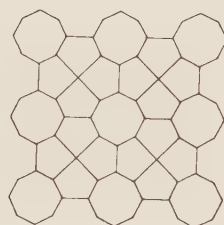
475



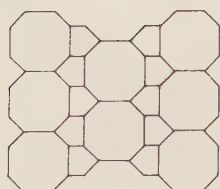
476



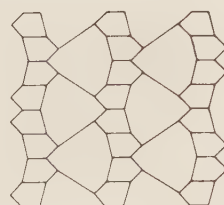
477



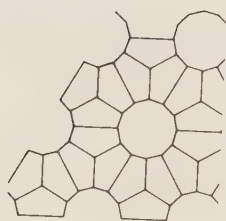
478



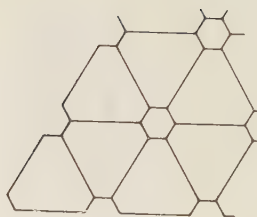
479



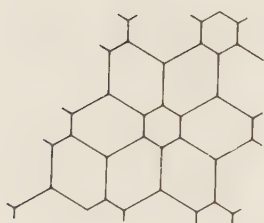
480



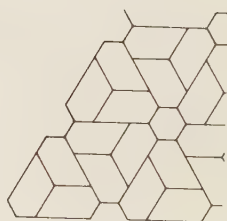
481



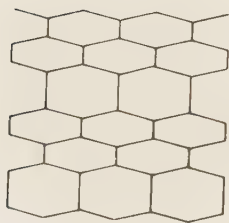
482



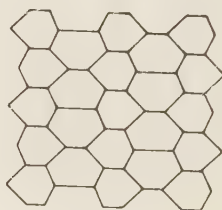
483



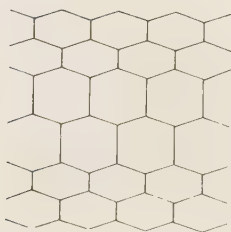
484



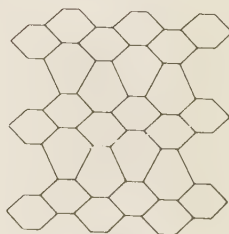
485



486



487



488

10) Zusammenfassung

Um die Voraussetzungen für eine allgemeinere Diskussion über Koordinationsmöglichkeiten in der Ebene mittels den einzelnen Teilchen zuzuordnenden Flächen zu schaffen, sollten in dieser Arbeit alle möglichen Ebenenzerlegungen mit zwei topologisch verschiedenen Flächen, die gewissen Bedingungen genügen müssen, hergeleitet werden. - Zunächst wurden - ausgehend von der Eulerschen Polyedergleichung - diophantische Gleichungen hergeleitet, die für die Ebenenzerlegungen der betrachteten Art notwendige, jedoch nicht auch hinreichende Bedingungen liefern. - Aus diesen Gleichungen folgt - neben einer Reihe von Abschätzungen -, daß in einer heterogenen Ebenenzerlegung mit zwei topologisch verschiedenen Flächenarten nicht zugleich die Flächen der einen Art eine Eckenanzahl, die größer oder gleich sechs ist, und die der anderen Art eine Eckenanzahl, die größer als sechs ist, besitzen können. - Da die Gleichungen keine obere Schranke für die Eckenanzahl der mit einem 3-, 4- oder 5-Eck kombinierbaren Flächen ergeben, zudem aus den jeweiligen Lösungsmengen durch Konstruktion die wirklichen Ebenenzerlegungen noch ausgesondert werden müssen, so wurde ein anderer Weg zur Lösung des Problems beschritten. Unter Benutzung der aus der Diskussion der Gleichungen folgenden Ergebnisse wurden 3-Ecke, 4-Ecke, 5-Ecke und 6-Ecke in der mit den Symmetriegerüsten der Ebenengruppen p_6 , p_4 , p_3 , p_2 , cm , pm , pg , $p1$ ausgestatteten Ebene in ihren möglichen Lagen zu den Symmetrieelementen betrachtet und die möglichen Eckenanzahlen und die Lage der Flächen der zweiten Art in jedem Einzelfall hergeleitet. - Damit wurden auch zugleich alle Zerlegungsmöglichkeiten in den restlichen Ebenengruppen automatisch erfaßt. - Die erhaltenen 488 Ebenenzerlegungen wurden durch ein topologisches Symbol charakterisiert, in einer Tabelle zusammengestellt und durch ein Bild graphisch veranschaulicht.

Herrn Prof. Dr. E. Hellner möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele hilfreiche Diskussionen danken.

Fräulein Horsch und Herr Köster waren mir bei der Herstellung der Abbildungen behilflich; auch ihnen danke ich.

11. Literatur

- 1) F. Laves, Phase Stability in Metals and Alloys,
(Mc Graw Hill Press), 1967, 93
- 2) F. Laves, Ebenenteilung und Koordinationszahl,
Z. Krist. 78 (1931), 208 - 241
- 3) P. Niggli, Die topologische Strukturanalyse I,
Z. Krist. 65 (1927), 404
- 4) F.C. Frank, J.S. Kasper, Complex alloy structures
regarded as sphere packings,
Acta Cryst. 11 (1958), 184 - 190
- 5) H. Takeda and J.D.H. Donnay, Compound tessellations
in crystal structures,
Acta Cryst. 19 (1965) 474
- 6) A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. I.
Acta Cryst. 7 (1954), 535 - 544
A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. II.
Acta Cryst. 7 (1954), 545 - 554
A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. III.
Acta Cryst. 7 (1954), 842 - 848
A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. IV.
Acta Cryst. 7 (1954), 849
A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. V.
Acta Cryst. 8(1955), 32
A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. VI.
Acta Cryst. 9 (1956), 23 - 28
A.F. Wells and R.R. Sharpe, The geometrical basis of
crystal chemistry. VII.
Acta Cryst. 16 (1963), 857 - 871
A.F. Wells, The geometrical basis of crystal chemistry. VIII.
Acta Cryst. 18 (1965), 894

- 7) W.T. Holser, Packing in framework structures.
Acta Cryst. 9 (1956), 764 - 767
- 8) N.L. Smirnova, Structure types with atomic close packings:
Possible structure types for the composition AB_3 .
Sov. Phys. Cryst. 1 (1956), 128

N.L. Smirnova, Structure types with closest atomic packing:
Possible structure types for the AB_4 composition.
Sov. Phys. Cryst. 1 (1956), 399
- 9) A.L. Loeb, The subdivision of the hexagonal net and the
systematic generation of crystal structures.
Acta Cryst. 17 (1964), 179
- 10) H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, New York 1961, 58
- 11) A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung,
Basel 1956
- 12) Owen Jones, Grammatik der Ornamente, Leipzig 1856
- 13) J. Kepler, Weltharmonik, Übersetzt und eingeleitet von
M. Caspar, München - Berlin 1939
- 14) A. Badoureaux, Mémoire sur les figures isoscèles,
Journal de l'Ecole polytechnique 30(1881), 47 ff
- 15) A. Andreini, Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari
e sulle corrispondenti reti correlative.
Memorie di Matematica e di Fisica.
Società Italiana della Scienze XIV (1907), 75 - 129
- 16) G.L. Dirichlet, Journal für die reine und angewandte
Mathematik, 40 (1850), 216 - 219
- 17) Ch. Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques ternaires
Journal für die reine und angewandte Mathematik
40 (1850)
- 18) M.G. Voronoi, Nouvelles application des paramètres
continus à la théorie des formes quadratiques
positives parfaites, Journal für die reine und
angewandte Mathematik 133 (1908), 97 ff

M.G. Voronoi, Nouvelles application des paramètres continus
à la théorie des formes quadratiques.
Journal für die reine und angewandte Mathematik
134 (1908), 198 ff

- 19) S. Raimes, The wave mechanics of electrons in metals,
Amsterdam 1963, 247 f.
- 20) H. Minkowski, Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter
Körper. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft
der Wissenschaften zu Göttingen, Math. - phys.
Klasse. 1904, 311 ff.
- 21) A. Schoenflies, Krystallsysteme und Krystallstructur,
Leipzig 1891
- 22) K. Reinhardt, Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.
Diss. Frankfurt a. M. 1918
- 23) F. von Fedorow, Reguläre Plan- und Raumtheilung,
Abh. d. math. - phys. Classe d. Königlich
Bayerischen Akademie der Wissenschaften
20. Bd., München 1900, 465 ff.
- 24) F. Haag, Die regelmäßigen Planteilungen.
Z. Krist. 49 (1911), 360 ff.
- F. Haag, Die regelmäßigen Planteilungen und Punktsysteme.
Z. Krist. 58 (1923), 478
- F. Haag, Die 17 regelmäßigen Planteilungen und Punktsysteme.
Z. Krist. 61 (1924), 339
- F. Haag, Die Grundgleichungen für Ebenen- und Raumteilung.
Z. Krist. 86 (1933), 153
- F. Haag, Die Polygone der Ebenenteilungen.
Z. Krist. 96 (1937), 78
- 24a) F. Haag, Strukturformeln für Ebenenteilungen.
Z. Krist. 83 (1932), 301
- 25) H. Heesch, Über topologisch gleichwertige Kristallbindungen.
Z. Krist. 84 (1933), 400
- 26) H. Heesch und O. Kienzle, Flächenschluß,
Berlin 1963, 32 f.
- 27) G. Pólya, Über die Analogie der Kristallsymmetrie in
der Ebene. Z. Krist. 60 (1924), 278 - 282

- 28) P. Niggli, Die Flächensymmetrien homogener Diskontinuen.
Z. Krist. 60 (1924), 283 - 298
- 29) F. Haeg, Die Planigone von Fedorow. Z. Krist. 63 (1926),
179 - 186
- 30) F. Laves, Ebenenteilung in Wirkungsbereiche.
Z. Krist. 76 (1931), 277 - 284
- 31) J.J. Burckhardt, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie,
Basel 1966, 104
- 32) H. Heesch und O. Kienzle, Flächenschluß,
Berlin 1963, 34
- 33) International Tables for X-Ray Crystallography (1952)
Vol. I. Birmingham: Kynoch Press

Lebenslauf

Am 15. März 1936 wurde ich als Sohn des Drehers Gustav Löckenhoff und seiner Ehefrau Helene, geb. Jenzowski, in Essen geboren.

Von 1942 bis 1948 besuchte ich mit einer $1\frac{1}{2}$ -jährigen kriegsbedingten Unterbrechung eine Volksschule, von 1948 bis 1953 die "Mittelschule für Jungen" in Essen-Steele. Von 1953 bis 1956 arbeitete ich als Hilfsarbeiter und besuchte während dieser Zeit eine Abendschule in Essen, an der ich mich auf das Abitur vorbereitete. Im Frühjahr 1956 bestand ich die Reifeprüfung als Nichtschüler vor einer staatlichen Prüfungskommission in Düsseldorf.

Im Wintersemester 1956 begann ich das Studium der Naturwissenschaften und legte im Frühjahr 1964 die Prüfung für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Physik, Mathematik und Pädagogik ab.

Nach einem halben Jahr aushilfsweiser Unterrichtstätigkeit an einem Hamburger Gymnasium trat ich im Oktober 1964 als Studienreferendar in das Studienseminar der Freien Hansestadt Bremen ein. Dort bestand ich im März 1966 die Pädagogische Prüfung für das Lehramt an Gymnasien.

Seit dem 1. April 1966 bin ich als Mitarbeiter bei Herrn Prof. Dr. E. Hellner im Mineralogischen Institut der Philipps-Universität Marburg beschäftigt.

